UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM032 - Cálculo II - Matemática Diurno - 2019/1
Prof. Zeca Eidam

Lista 2

✰ Funções reais de duas e três variáveis

1. Ache e esboce o domínio das funções:

   (a) $f(x,y)=\sqrt{x-y}$ (b) $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$
   (c) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ (d) $f(x,y)=\dfrac{x}{y^x}$
   (e) $f(x,y)=\tan(x-y)$ (f) $f(x,y)=\ln(xy^2-x^3)$
   (g) $f(x,y)=\ln(16-4x^2-y^2)$

2. Esboce uma família de curvas de nível de:

   (a) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ (b) $f(x,y)=x-\sqrt{1-y^2}$
   (c) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2-y^2}$ (d) $f(x,y)=\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$

3. Esboce os gráficos de:

   (a) $f(x,y)=1-x-y$ (b) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+1}$ (c) $f(x,y)=\sqrt{x^2+9y^2}$
   (d) $f(x,y)=4x^2+y^2$ (e) $f(x,y)=y^2-x^2$ (f) $f(x,y)=y^2+1$
   (g) $f(x,y)=y^2+x$ (h) $f(x,y)=xy$ (i) $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^2}}$
   (j) $f(x,y)=\dfrac{1}{4x^2+9y^2}$ (k) $f(x,y)=(x-y)^2$ (l) $f(x,y)=x^2+y^2+2y+3$
   (m) $f(x,y)=\dfrac{1}{(x^2+2y^2)^2}$ (n) $f(x,y)=\ln(9x^2+y^2)$ (o) $f(x,y)=2-\sqrt[4]{x^2+4y^2}$
   (p) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}$ (q) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}$

4. Seja $\gamma(t)=(e^t+1,e^{-t})$, para $t\in\mathbb{R}$.

   ① Desenhe a imagem de γ indicando o sentido de percurso.

   ② Verifique se a imagem de γ está contida em alguma curva de nível de $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

   $$f(x,y)=x^2y^2-2y-y^2+4.$$

   Em caso afirmativo, em qual nível?

5. Seja $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+4}$ e seja $\gamma(t)=(t\cos t,t\sin t,\sqrt{t^2+4})$, $t\geq 0$.

   (a) Mostre que a imagem de γ está contida no gráfico de f.

   (b) Façaa um esboço do traço de γ.

6. Encontre uma parametrização para a curva de nível no nível c de f nos casos:

   ① $f(x,y) = x + 2y - 3,\ \ c = -2;$

   ② $f(x,y) = x - \sqrt{1-2y^2},\ \ c = 5;$

   ③ $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2},\ \ c = 1.$

   Encontre a reta tangente às curvas dos itens (a), (b) e (c) acima nos pontos $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$, $(6,0)$ e $(\sqrt{2}, 1)$, respectivamente.

7. Seja $f(x,y) = \dfrac{2x^2 + 4y^2}{x^2 + y^2 + 1}$.

   ① Esboce as curvas de nível de f dos níveis $c = 1$, $c = 2$ e $c = 3$.

   ② Encontre uma curva diferenciável γ cuja imagem seja a curva de nível de f do nível $c = 1$.

   ③ Determine o vetor tangente à curva γ do item anterior no ponto $(-1,0)$.

   ④ Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, z(t))$. Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de f, encontre o vetor tangente a γ em $\gamma(\frac{\pi}{3})$.

☆ Limites e continuidade

8. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y \cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{2x^4 + x^2 y + y^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3-y}$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 \sin(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} \sin\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

(k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y + y^4 + x^4}{x^3 y - x y^3}$

(l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + \sin(x^2+y^2)}{y^4 + \sin(x^2+y^2)}$

(m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

(o) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$

(p) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin^2 y}{x^2+2y^2}$

9. Determine o conjunto dos pontos de continuidade das funções abaixo:

(a) $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{e^x - y^2}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x-y^3}}{1-x^2-y^2}$

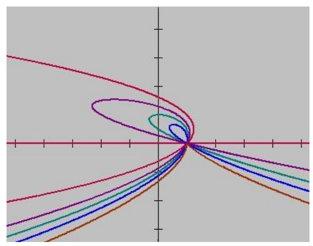
(c) $f(x,y) = \arctan(x + \sqrt{1/y})$

(d) $f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2)$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^3} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)((x-1)^2+(y-1)^2)} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \text{ e } (x,y) \neq (1,1) \\ 1 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \text{ ou } (x,y) = (1,1) \end{cases}$

10. O domínio de uma função f é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (1,0)\}$. A figura abaixo mostra as curvas de nível de f nos níveis $k=0$, $k=0,3$, $k=0,5$, $k=0,7$ e $k=1$. Existe $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Justifique.



☆ **Derivadas parciais, gradiente e diferenciabilidade**

11. Ache as derivadas parciais de primeira ordem das funções:

    (a) $f(x,y) = \arctan(y/x)$ (b) $f(x,y) = \ln(1+\cos^2(xy^3))$ (c) $f(x,y) = \dfrac{1-xy}{1+x^2+y^2}$

12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:

    (a) $u(x,y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ (b) $u(x,y) = f(ax+by)$, onde a e b são constantes.

    (c) $u(x,y) = f(xy^2-2x)$ (d) $u(x,y) = f(e^{x^2+y^2})$

13. Dada a função $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} e^{\sin(x^2y)}$, ache $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$. (Neste caso, usar a definição de derivada parcial é menos trabalhoso do que aplicar as regras de derivação.)

14. Verifique que a função $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

15. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deriváveis até 2a. ordem.

    (a) Mostre que $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

    (b) Mostre que $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ é solução da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

16. Sejam $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$ e $g(x,y) = |xy|^{\frac{5}{4}}$. Mostre que f e g são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

17. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} + \sin(x+3y) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.

(b) f é contínua em $(0,0)$?

(c) f é diferenciável em $(0,0)$?

18. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que f é contínua em (0,0).

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) f é diferenciável em $(0,0)$?

(d) São $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em $(0,0)$?

19. Considere $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

(b) As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$?

20. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin\left((x^2+y^2)^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Verifique que f é contínua em $(0,0)$.

(b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) A função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

(d) A função f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

21. Seja $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Verifique que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ para todo y, e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, para todo x.

(b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

22. Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde f é diferenciável, sendo:

(a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ (b) $f(x,y) = x|y|$

(c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^4+y^4}}$ (d) $f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$

23. Mostre que não existe nenhuma função diferenciável $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x,y) = (x^2y, y^2)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

24. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

(a) $z = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$, no ponto $(0,0,1)$ (b) $z = \ln(2x+y)$, no ponto $(-1,3,0)$
(c) $z = x^2 - y^2$, no ponto $(-3,-2,5)$. (d) $z = \mathrm{e}^x \ln y$, no ponto $(3,1,0)$.

25. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0,1,5)$ e $(0,0,6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x,y) = x^3y$.

26. Seja $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície $z = xf\left(\frac{x}{y}\right)$ passam pela origem.

27. Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas $\gamma(t) = (2,t,2t^2)$ e $\mu(t) = (2t^2,t,2t^4)$ estejam contidas no gráfico de f. Determine o gradiente de f no ponto $(2,1)$.

28. O gradiente de $f(x,y) = x^2 + y^4$ é tangente à imagem da curva $\gamma(t) = (t^2,t)$, $t > 0$ em um ponto P. Encontre a equação da reta tangente à curva de nível de f que contém P, no ponto P.

29. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

(a) $f(x,y) = xe^{-y} + 3y$, $(1,0)$; (b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $(1,2)$;

30. Mostre que $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y}$ é contínua em $(0,0)$ e tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$. É f diferenciável em $(0,0)$?

31. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t+1,-t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma curva de nível de f. Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,-4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1,-4)$ e na direção e sentido do vetor $\vec{u} = (3,4)$.

32. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Calcule o gradiente de f no ponto $(0,0)$.

(b) Mostre que $\frac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big) \neq \nabla f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$ em $t = 0$, onde $\gamma(t) = (-t,-t)$.

(c) Seja $\vec{u} = (a,b)$ um vetor unitário (isto é, $a^2+b^2 = 1$). Use a definição de derivada direcional para calcular $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$.

(d) f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

33. Seja $a > 0$ e considere o plano tangente à superfície $xyz = a$ num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tem volume independente do ponto de tangência.

☆ **Regra da cadeia**

34. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

   (a) $w = x^2 + y^2; x = t^2 + u^2, y = 2tu.$

   (b) $w = \dfrac{x}{x^2 + y^2}; x = t\cos u, y = t\sin u.$

   (c) $w = x^2 + y^2 + z; x = tu, y = t + u, z = t^2 + u^2.$

35. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Calcule g_u, g_v, em função de f_x, f_y nos seguintes casos:

   (a) $g(u, v) = f(u^2, v^3)$
   (b) $g(u, v) = \sin u - f(2u - 3v^2, u - \cos v)$
   (c) $g(u, v) = f(\sin(u + v), \cos(u - v))$
   (d) $g(u, v) = f(e^{u^2}, \ln(u + v))$

36. Uma função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ é **homogênea de grau** λ se satisfaz $f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y)$ para todos $t > 0$ e $(x, y) \neq (0,0)$, para um certo $\lambda \in \mathbb{R}$ fixo. Supondo que f é uma função de classe C^2 homogênea de grau λ, verifique que:

   (a) $xf_x + yf_y = \lambda f$; (Relação de Euler)

   (b) As funções f_x e f_y são homogêneas de grau $\lambda - 1$.

37. Verifique que as funções abaixo são homogêneas e determine o grau:

   (a) $f(x, y) = 5x^2 + 2xy - y^2$
   (b) $f(x, y) = \dfrac{xe^{\frac{x}{y}}}{x^2 + y^2}$
   (b) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 + y^3}}$
   (c) $f(x, y) = \dfrac{xy\sin(y/x)}{x^4 + y^4}$

38. O raio de um cilindro circular está decrescendo à taxa de 1,2cm/s enquanto sua altura está crescendo à taxa de 3cm/s. A que taxa o volume do cilindro está variando quando o raio vale 80 cm e a altura vale 150 cm?

39. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\nabla f(-2, -2) = (a, -4)$ e

$$g(t) = f(2t^3 - 4t, t^4 - 3t).$$

   Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = 2x + 3$.

40. Seja $u = u(x, y)$ função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$ e defina $v(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta) = \Delta u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta),$$

   onde, por definição, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

41. Seja $f = f(x,y)$ uma função de classe C^2 e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(u,v) = uf(u^2 - v, u + 2v)$.

   (a) Determine $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ em função das derivadas parciais de f.

   (b) Sabendo que $3x + 5y = z + 26$ é o plano tangente ao gráfico de f, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,4) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,4) = 1$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,4) = -1$, calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(-2,3)$.

42. Seja $F(r,s) = G(e^{rs}, r^3 \cos(s))$, onde $G = G(x,y)$ é uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$.

   (a) Calcule $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,s)$ em função das derivadas parciais de G.

   (b) Determine $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(1,0)$ sabendo que $\dfrac{\partial G}{\partial y}(t^2 + 1, t + 1) = t^2 - 2t + 3$.

43. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = \ln(x^2 + ky^2)$ no ponto $(2,1,f(2,1))$ seja perpendicular ao plano $3x + z = 0$.

44. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ e tal que $2x + y + z = 7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(0,2,f(0,2)\big)$. Seja

$$g(u,v) = u\, f\big(\operatorname{sen}(u^2 - v^3), 2u^2 v\big).$$

Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $\big(1,1,g(1,1)\big)$ seja paralelo ao vetor $(4,2,a)$.