UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM032 - Cálculo II - Turma A
Prof. José Carlos Eidam

1	
2	
3	
Nota	

GABARITO

PRIMEIRA PROVA - 28/03/2019

Nome: ____

GRR: ______________________ **Assinatura:** ______________________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas e pode usar sem provar todos os resultados utilizados em aula;
3. Você pode utilizar sem provar as expressões para polinômios de Taylor vistas em aula;
4. Faça a prova a lápis;
5. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
6. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
7. Boa prova!

Questão 1 Usando polinômios de Taylor, determine uma aproximação para cada um dos números abaixo com erro ε satisfazendo as condições explicitadas. Procure em todos os cálculos utilizar o polinômio de menor grau possível:

1. **(1,5 ponto)** $\text{sen}(1/2)$, $\varepsilon < 10^{-4}$

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + E_{2n+1}(x); \quad |E_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$|E_{2n+1}(1/2)| \leq \frac{1}{2^{2n+2}(2n+2)!} \overset{?}{<} 10^{-4} \iff 2^{2n+2}(2n+2)! > 10.000$$

$\underline{n=1}$ $\quad 16 \cdot 24 = 384$

$\underline{n=2}$ $\quad 64 \cdot 720 = 46.080 > 10.000$

$$\therefore \text{sen}(1/2) \simeq \frac{1}{2} - \frac{(1/2)^3}{3!} + \frac{(1/2)^5}{5!} \quad \text{com erro} < 10^{-4}$$

2. **(1,5 ponto)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$, $\varepsilon < 10^{-4}$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}} = e^{-1/3}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x), \qquad E_n(x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!},$$

c ENTRE ZERO E x

$\underline{x = -1/3}$: $\quad |E_n(-1/3)| = \dfrac{e^c (1/3)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \dfrac{1}{3^{n+1}(n+1)!}$ $\quad$ (POIS $-\frac{1}{3} \leq c \leq 0$

$\Rightarrow e^c \leq 1$.) ASSIM, BASTA QUE $\dfrac{1}{3^{n+1}(n+1)!} < 10^{-4}$, i.e.,

$$3^{n+1}(n+1)! > 10.000$$

* $n=3$: $\quad 3^4 \cdot 4! = 81 \cdot 24 = 1944$

* $n=4$: $\quad 3^5 \cdot 5! = 243 \cdot 120 = 29.160 > 10.000$

$$\therefore e^{-1/3} \simeq 1 - \frac{1}{3} + \frac{(-1/3)^2}{2!} + \frac{(-1/3)^3}{3!} + \frac{(-1/3)^4}{4!}, \quad \text{com erro} < 10^{-4}.$$

3. **(1,5 ponto)** $\ln 5$, $\varepsilon < 10^{-4}$

- $\ln 5 = -\ln(1/5)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n} x^{n+1} + E_n(x)$; ONDE

$$E_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}\, dt .$$

⊛

$1+t > 1 - 4/5 = 1/5$

$\underline{x = -4/5}$: $\left|E_n(-4/5)\right| \leq \int_{-4/5}^{0} \frac{|t|^{n+1}}{\underbrace{1+t}_{> \frac{1}{5}}}\, dt \overset{⊛}{\leq} 5 \int_0^{4/5} t^{n+1}\, dt = \frac{5}{n+2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+2}$

$\overset{??}{<} 10^{-4} \iff \frac{n+2}{5}\left(\frac{5}{4}\right)^{n+2} > 10.000 \longrightarrow n = 31$ SERVE

4. **(1,5 ponto)** $\cos 2$, $\varepsilon < 10^{-3}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + E_n(x), \quad |E_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$|E_n(2)| \leq \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \overset{??}{<} 10^{-3} \iff 2^{2n+1} \cdot 1000 < (2n+1)!$$

$\underline{n=4}$ $\quad 2^9 \cdot 1000 = 512.000 > 9! = 362.880$

$\underline{n=5}$ $\quad 2^{11} \cdot 1000 = 2.048.000 < 39.916.800 = 11!$

$\therefore$ $\underline{n = 5 \quad \text{SERVE}}$

Questão 2 (1 ponto) Seja

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x^3),\ x \in \mathbb{R}.$$

Determine $f^{(2019)}(0)$. (Aqui, $f^{(n)}(0)$ denota a derivada de f de ordem n calculada em $x = 0$.)

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$$

$$\therefore \operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \overbrace{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}^{P_{2n+1}(x)} + E_{2n+1}(x),$$

$$E_{2n+1}(x) \doteq \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \quad \therefore \left|E_{2n+1}(x)\right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3},$$

$$\therefore \frac{E_{2n+1}(x)}{|x|^{2n+1}} \leq \frac{|x|^2}{2n+3} \xrightarrow{x \to 0} 0 \quad \therefore \text{O POL. DE TAYLOR}$$

DE $h(x) = \operatorname{arctg} x$ EM $x = 0$ (DE GRAU $2n+1$) É P_{2n+1} (ACIMA).

LOGO,

$$f(x) = x^3 - \frac{(x^3)^3}{3} + \frac{(x^3)^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n (x^3)^{2n+1}}{2n+1} + E_{2n+1}(x^3)$$

$$= x^3 - \frac{x^9}{3} + \frac{x^{15}}{5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{6n+3}}{2n+1} + E_{2n+1}(x^3)$$

$$\therefore \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{SE } k \text{ NÃO É DA FORMA } 6n+3 \\ \dfrac{(-1)^n}{2n+1} & \text{SE } k = 6n+3 \end{cases}$$

COMO $2019 = 6 \cdot \underbrace{336}_{n} + 3$ ENTÃO

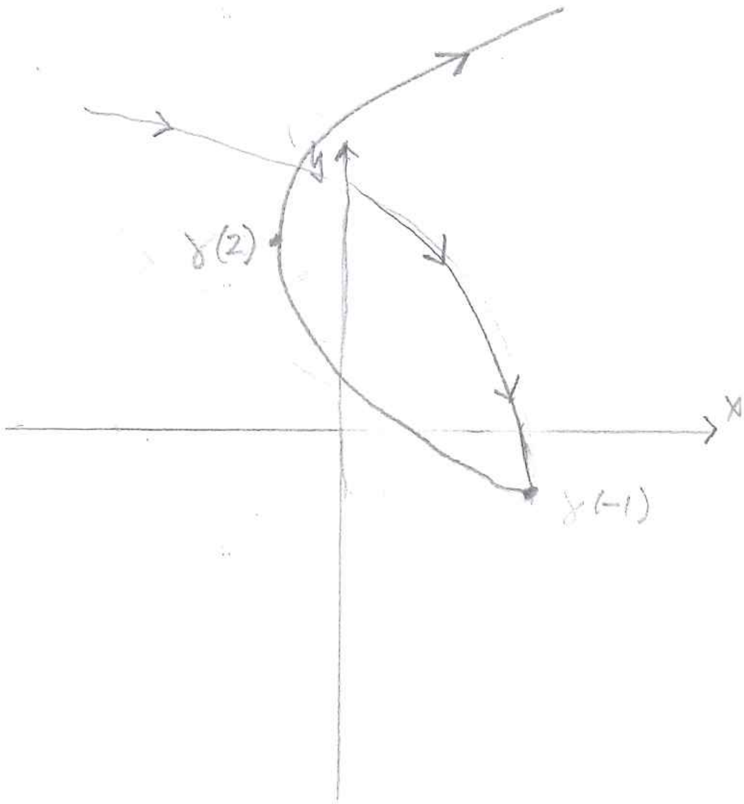
$$\frac{f^{(2019)}(0)}{(2019)!} = \frac{(-1)^{336}}{2 \cdot 336 + 1} \Rightarrow f^{(2019)}(0) = \frac{(2019)!}{673}.$$

Questão 3 (3 pontos) Considere a curva $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma(t) = (\underbrace{2t^3-3t^2-12t+1}_{x}, \underbrace{t^2+2t}_{y}).$$

Determine os intervalos de crescimento e decrescimento das componentes de γ, o sinal da curvatura, os limites pertinentes e esboce o traço de γ.

$$x' = 6t^2-6t-12 = 6(t^2-t-2) = 6(t-2)(t+1) \qquad y' = 2t+2 = 2(t+1)$$



x': + + (−1) − − − (2) + +

y': − − (−1) + + + +

SINAL DE k

$$\left(\frac{y'}{x'}\right)' = \left(\frac{2(t+1)}{6(t-2)(t+1)}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t-2}\right)' = -\frac{1}{3}\frac{1}{(t-2)^2} < 0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,\infty)$
x	↑	↓	↑
y	↓	↑	↑
k	<0	<0	<0

LIMITES

	$t\to-\infty$	$t\to+\infty$
x	$-\infty$	$+\infty$
y	$+\infty$	$+\infty$

$\gamma(-1) = (8,-1)$

$\gamma(2) = (-7,8)$