UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM032 - Cálculo II
Prof. Zeca Eidam

	A
1	
2	
3	
Nota	

GABARITO

SEGUNDA PROVA - 30/04/2019

Nome: ______________________________

GRR: ______________ Assinatura: ______________________

ATENÇÃO!

1. Você deve justificar todas as suas respostas e pode utilizar (sem demonstração) todos os resultados vistos ou comentados em aula;
2. Você poderá deixar a sala somente após as 14h;
3. Faça a prova a lápis, por favor;
4. Boa prova!

Questão 1 Estude a existência dos limites abaixo, determinando o valor daqueles que existem ou justificando o motivo da não-existência (cada item vale **1 ponto**):

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{xy^2}{x^2+7y^4}}_{=f(x,y)}$$

$\to \gamma_1(t) = (t,0) \Rightarrow f(t,0) \equiv 0 \therefore \lim_{t\to 0} f(t,0) = 0.$

$\to \gamma_2(t) = (t^2,t) \Rightarrow f(t^2,t) = \frac{1}{8},\ t \neq 0 \therefore \lim_{t\to 0} f(t^2,t) = \frac{1}{8}$

LOGO, O LIMITE NÃO EXISTE.

2. $$\lim_{(x,y)\to(7,7)} \frac{\operatorname{sen}(x^3y^2 - x^2y^3)}{x-y}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(x^3y^2 - x^2y^3)}{x-y} = \frac{\operatorname{sen}(x^2y^2(x-y))}{x^2y^2(x-y)} \cdot \frac{x^2y^2(x-y)}{x-y}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(x^2y^2(x-y))}{x^2y^2(x-y)} \cdot x^2y^2$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(7,7)} \frac{\operatorname{sen}(x^3y^2-x^2y^3)}{x-y} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} \cdot 7^2 \cdot 7^2 = 7^4 = 2401.$$

3. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+e^{x-y}}}$$

TEMOS $0 \leq x^2 \leq x^2 + e^{x-y}$, POIS $e^{x-y} > 0$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. LOGO,

$$0 \leq \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+e^{x-y}}} \right| \leq 1,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$ LOGO,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+e^{x-y}}}}_{\text{LIMITADA}} \cdot \underbrace{\ln(1+x^2+y^2)}_{\downarrow (x,y)\to(0,0) \quad \ln 1 = 0} = 0.$$

Questão 2 (1,5 ponto) Descreva da forma mais completa possível as curvas de nível da função $f : D \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y},$$

onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x^2\}$.

A CURVA DE NÍVEL DE f NO NÍVEL c, $c \in \mathbb{R}$, É O CONJUNTO SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $f(x,y) = c$, i.e.,

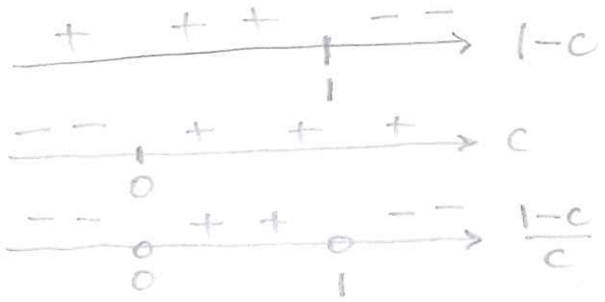
$$\frac{x^2}{x^2+y} = c.$$

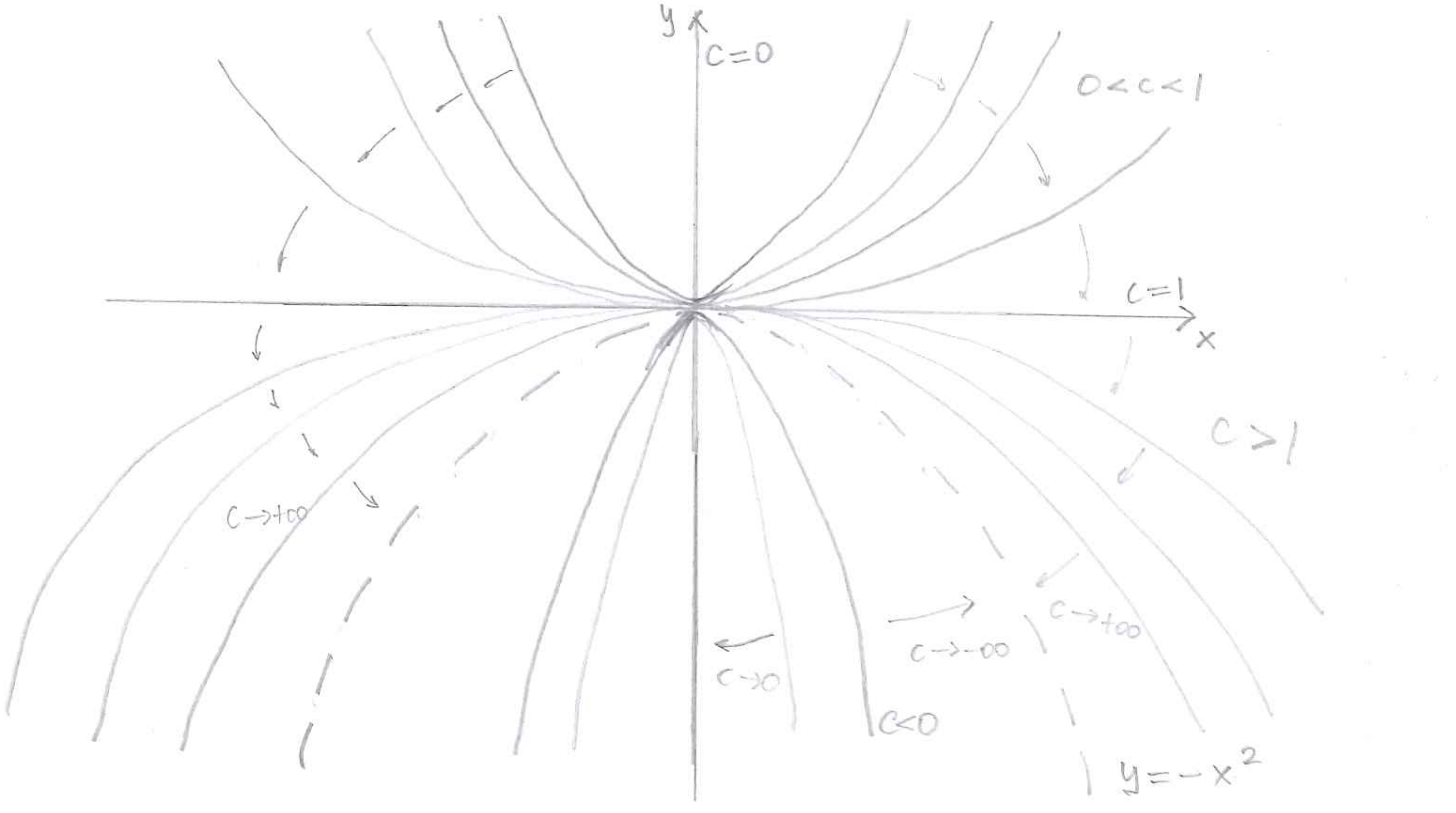
(a) $c = 0 \Rightarrow x = 0$. (RETA)

(b) $c \notin \{0,1\} \Rightarrow y = \left(\frac{1-c}{c}\right) x^2$ $\therefore$ A CURVA DE NÍVEL É UMA PARÁBOLA

(c) $c = 1 \Rightarrow y = 0$. (RETA)

$\rightarrow$ SINAL DE $\frac{1-c}{c}$:





Questão 3 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \text{sen} y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. **(2 pontos)** Determine as derivadas parciais de f em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

$\underline{(x,y) \neq (0,0):}$

$$f_x(x,y) = \frac{2x \,\text{sen}\, y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^3 \,\text{sen}\, y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$$

$$f_y(x,y) = \frac{x^2 \cos y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2 y \,\text{sen}\, y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$$

$\underline{(x,y) = (0,0):}$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

2. **(2 pontos)** Mostre que f é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

f_x E f_y SÃO CONTÍNUAS FORA DA ORIGEM (SOMAS, PRODUTOS, QUOCIENTES E COMPOSTAS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS) $\therefore$ f É DIFERENCIÁVEL FORA DA ORIGEM (TEO. VISTO EM AULA). COMO

$$f_x(x,y) = 2 \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{LIMITADA}} \cdot \underset{\substack{\downarrow (x,y)\to(0,0) \\ 0}}{\text{sen}\, y} - \underbrace{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^3}_{\text{LIMITADA}} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\text{sen}\, y} \longrightarrow 0 = f_x(0,0)$$

E

$$f_y(x,y) = \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{LIMITADA}} \Bigg(\underset{\substack{\downarrow (x,y)\to(0,0) \\ 0}}{x \cos y} - \underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}_{\text{LIMITADA}} \underset{\substack{\downarrow (x,y)\to(0,0) \\ 0}}{\text{sen}\, y} \Bigg) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0 = f_y(0,0)$$

VIDE ★

TEMOS

$$0 \leq (|x|-|y|)^2 = x^2+y^2-2|xy|$$

$$\therefore \quad |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \implies \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}, \quad (x,y)\neq(0,0)$$

$\therefore$ f_x E f_y SÃO CONTÍNUAS EM $(0,0)$. PELO TEO. VISTO EM AULA, f É DIFERENCIÁVEL EM $(0,0)$.

<u>OU</u> PODEMOS FAZER O ESTUDO NA ORIGEM PELA DEFINIÇÃO:

$$\frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \frac{h^2 \operatorname{sen} k}{h^2+k^2} = \underbrace{\frac{h^2}{h^2+k^2}}_{\text{LIMITADA}} \cdot \underbrace{\operatorname{sen} k}_{\substack{\downarrow (h,k)\to(0,0) \\ 0}} \xrightarrow{(h,k)\to(0,0)} 0.$$

$\therefore$ f É DIFERENCIÁVEL EM $(0,0)$.

3. **(1,5 ponto)** Mostre que f é de classe C^1, i.e., as derivadas parciais de f são contínuas em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

VIDE O ITEM (2).