UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM032 - Cálculo II - Turma A - Matemática Diurno
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
Nota	

GABARITO

TERCEIRA PROVA - 30/05/2019

Nome: ______________________________

GRR: ______________ **Assinatura:** ______________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

Questão 1 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que o plano de equação

$$\Pi: \quad 3x - 5y + 7z = 48$$

é tangente ao seu gráfico no ponto $(1, -2, f(1, -2))$.

1. **(1 ponto)** Determine $f(1,-2)$, $\nabla f(1,-2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,-2)$, onde $v = (-1, 9)$

$\Pi: \quad z - 5 = -\frac{3}{7}(x-1) + \frac{5}{7}(y+2) \quad \therefore f(1,-2) = 5,$

$f_x(1,-2) = -3/7, \quad f_y(1,-2) = 5/7.$

$\therefore \nabla f(1,-2) = (-3/7, 5/7)$

COMO f É DIFERENCIÁVEL,

$\frac{\partial f}{\partial v}(1,-2) = \nabla f(1,-2) \cdot v = (-3/7, 5/7) \cdot (-1, 9)$

$= +\frac{3}{7} + \frac{45}{7} = 48/7.$

2. **(1,5 ponto)** Seja $g(t) = f(x(t), y(t))$, onde

$$x(t) = e^{t^2} \cos t - \operatorname{sen}(3t), \; y(t) = \cos(t - \pi) - e^{-2t}.$$

Determine $g'(0)$.

$\longrightarrow g'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$

$\longrightarrow x(0) = 1, \quad y(0) = -2$

$\longrightarrow x'(t) = 2te^{t^2} \cos t - e^{t^2} \operatorname{sen} t - 3\cos 3t \Rightarrow x'(0) = -3$

$y'(t) = -\operatorname{sen}(t - \pi) + 2e^{-2t} \Rightarrow y'(0) = 2$

$\therefore g'(0) = \left(-\frac{3}{7}\right) \cdot (-3) + \frac{5}{7} \cdot 2 = \frac{19}{7}.$

3. **(1,5 ponto)** Seja

$$g(u,v) = \{u + f(\underbrace{e^{u+v} - u^2 v}_{\doteq x}, \underbrace{\text{sen}(2u) - 2\cos(u+v)}_{\doteq y})\}^2, \ (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Determine $\nabla g(0,0)$.

$$g_u(u,v) = 2\left(u + f(x,y)\right)\left\{1 + f_x(x,y)\cdot\left(e^{u+v} - 2uv\right) + f_y(x,y)\left(2\cos(2u) + 2\,\text{sen}(u+v)\right)\right\}$$

$$g_v(u,v) = 2\left(u + f(x,y)\right)\left\{f_x(x,y)\left(e^{u+v} - u^2\right) + f_y(x,y)\left(2\,\text{sen}(u+v)\right)\right\}$$

$\rightarrow x(0,0) = 1, \quad y(0,0) = -2$

$$\therefore \ g_u(0,0) = 2f(1,-2)\left\{1 + \left(-\frac{3}{7}\right)\cdot 1 + \frac{5}{7}\cdot 2\right\} = 2\cdot 5\left(1 - \frac{3}{7} + \frac{10}{7}\right) = 20$$

$$g_v(0,0) = 2f(1,-2)\left\{-\frac{3}{7}\cdot 1 + \frac{5}{7}\cdot 0\right\} = 2\cdot 5\cdot\left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{30}{7}$$

$$\therefore \ \nabla g(0,0) = \left(20, -\frac{30}{7}\right).$$

Questão 2 Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 8x^3 + y^2 + 12xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. **(1 ponto)** Determine os pontos críticos de f.

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 24x^2 + 12y = 0 \\ f_y(x,y) = 2y + 12x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} x=0\ ,\ y=0 \\ \text{ou} \\ x=3\ ,\ y=-18 \end{array}$$

PONTOS CRÍTICOS $P_1 = (0,0)$ E $P_2 = (3,-18)$

2. **(1,5 ponto)** Classifique estes pontos críticos em máximo local, mínimo local ou sela. Algum deles é extremante global?

$f_{xx}(x,y) = 48x$ $\therefore \det H(x,y) = 48x \cdot 2 - 12^2$

$f_{xy}(x,y) = 12$ $= 48(2x-3)$

$f_{yy}(x,y) = 2$

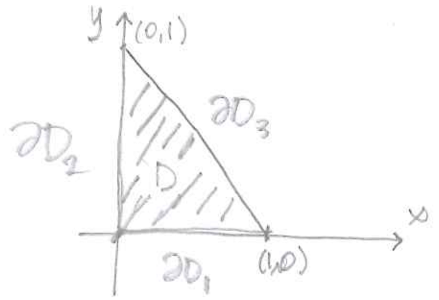
P_1 $\det H(0,0) = 48 \cdot (-3) = -144 < 0$ $\therefore P_1$ É PONTO DE SELA

P_2 $\det H(3,-18) = 48(2 \cdot 3 - 3) = 144 > 0$, $f_{xx}(3,-18) = 144 > 0$

$\therefore P_2$ É MÍNIMO LOCAL

COMO $f(x,0) = 8x^3$, ENTÃO $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x,0) = \pm\infty$, LOGO f NÃO ADMITE EXTREMANTES GLOBAIS.

3. **(1,5 ponto)** Determine os valores máximo e mínimo de f sobre a região triangular D determinada pelos pontos $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.



→ O INTERIOR DE D NÃO CONTÉM PONTOS CRÍTICOS.

∂D_1: $0 \leq x \leq 1$, $y=0$: $g_1(x) = f(x,0) = 8x^3$, $0 \leq x \leq 1$

CANDIDATOS : $P_1 = (0,0)$, $P_3 = (1,0)$ (SÓ OS EXTREMOS)

∂D_2: $0 \leq y \leq 1$, $x = 0$: $g_2(x) = f(0,y) = y^2$, $0 \leq y \leq 1$

CANDIDATOS $P_1 = (0,0)$; $P_4 = (0,1)$ (SÓ OS EXTREMOS)

∂D_3: $0 \leq x \leq 1$, $y = 1-x$; $g_3(x) = f(x,1-x)$

$$= 8x^3 + (1-x)^2 + 12x(1-x)$$
$$= 8x^3 + (1-x)^2 + 12x - 12x^2$$

$$g_3'(x) = 24x^2 - 2(1-x) + 12 - 24x$$
$$= 24x^2 - 22x + 10$$
$$= 2(12x^2 - 11x + 5) = 0$$

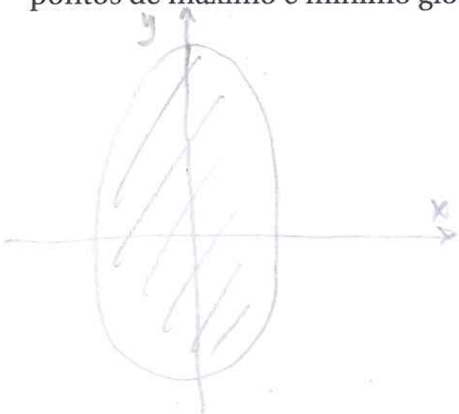
; COMO $\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 5 = -119 < 0$,

ENTÃO g_3 NÃO TEM PONTOS CRÍTICOS.

CANDIDATOS $P_3 = (1,0)$, $P_4 = (0,1)$ (SÓ OS EXTREMOS)

PELO TEO. DE WEIERSTRASS, f TEM EXTREMANTES GLOBAIS EM D. COMO $f(0,0) = 0$, $f(1,0) = 8$, $f(0,1) = 1$, SEGUE QUE P_3 É MAX. GLOBAL E P_1 É MIN. GLOBAL. OS VALORES MÁXIMO E MÍNIMO SÃO 8 E ZERO, RESPECTIVAMENTE.

Questão 3 **(2 pontos)** Sejam $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \le 1\}$ e $f(x,y) = x^2y^3$, $(x,y) \in D$. Determine os pontos de máximo e mínimo global de f e os respectivos valores máximo e mínimo de f em D.



INTERIOR DE D

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy^3 = 0 \\ f_y(x,y) = 3x^2y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$$

PONTOS CRÍTICOS $(x,0)$ e $(0,y)$, (*)

COMO $f(x,0) = f(0,y) = 0$ E $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) > 0$, $f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) < 0$, ESTES PONTOS (*) NÃO SÃO EXTREMANTES DE f.

FRONTEIRA: $g(x,y) = x^2 + 2y^2$; $\partial D = \{(x,y) / g(x,y) = 1\}$.

NUM EXTREMANTE EM ∂D, DEVEMOS TER $\nabla f = \lambda \nabla g$, OU SEJA,

$$\begin{cases} 2xy^3 = 2\lambda x \quad (1) \\ 3x^2y^2 = 4\lambda y \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2y^3 = 2\lambda x^2 \\ 3x^2y^3 = 4\lambda y^2 \end{cases}$$

SOMANDO, OBTEMOS $5x^2y^3 = 2\lambda(x^2 + 2y^2) = 2\lambda$ $\therefore$ $\lambda = \frac{5}{2}x^2y^3$. LOGO, DE (1), $xy^3 = \lambda x = \frac{5}{2}x^2y^3 \cdot x$. DA 1ª PARTE, PODEMOS SUPOR $x \neq 0$ E $y \neq 0$ $\therefore$ $1 = \frac{5}{2}x^2 \Rightarrow$ $x = \pm\sqrt{2/5}$. DE (2), $3x^2y^2 = 4\lambda y = 4 \cdot \frac{5}{2}x^2y^3 \cdot y \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{3}{10}}$.

PONDO $P_1 = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{3}{10}}\right)$ E $P_2 = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{10}}\right)$, $P_3 = \left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{3}{10}}\right)$, $P_4 = \left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{10}}\right)$, TEMOS

PONTO DE MÁX. GLOBAL

$$f(P_1) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \left(\sqrt{\frac{3}{10}}\right)^3 = f(P_3) \to \text{VLR. MÁXIMO}$$

$$f(P_2) = -\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \left(\sqrt{\frac{3}{10}}\right)^3 = f(P_4) \to \text{VLR. MÍNIMO}$$

MÍNIMO GLOBAL

(PELO TEO. DE WEIERSTRASS, f ADMITE EXTREMANTES GLOBAIS EM D $\therefore$ P_1, P_3 DEVEM SER OS MÁXIMOS GLOBAIS E P_2, P_4 OS MÍNIMOS GLOBAIS).