UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM032 - Cálculo II - Turma A - Matemática Diurno
Prof. José Carlos Eidam

	A
1	
2	
3	
Nota	

GABARITO

QUARTA PROVA - 18/06/2019

Nome: ____

GRR: ____________________ **Assinatura:** ______________________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas;
3. Faça a prova a lápis;
4. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 14h;
5. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
6. Boa prova!

Questão 1 (2 pontos) Determine 3 números positivos cuja soma seja 2019 e cujo produto seja máximo.

DA DESIGUALDADE ENTRE AS MÉDIAS ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA, DADOS $x, y, z > 0$,

$$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3},$$

COM IGUALDADE SSS $x=y=z$. LOGO, SE $x+y+z=2019$, TEMOS

$$xyz \le \left(\frac{2019}{3}\right)^3 = (673)^3.$$

O VALOR MÁXIMO DO PRODUTO xyz É ASSUMI-DO QUANDO $x=y=z$; COMO $x+y+z=2019$, ENTÃO $x=y=z=673$. ASSIM, OS VALORES QUE MAXIMIZAM O PRODUTO xyz SÃO $x=y=z=673$.

Questão 2 (2 pontos) Considere a região $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ e $f : E \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = xyz^2.$$

Determine os valores máximo e mínimo de f em E e os respectivos pontos de máximo e mínimo.

NO INTERIOR

$$\begin{cases} f_x = yz^2 = 0 \\ f_y = xz^2 = 0 \\ f_z = 2xyz = 0 \end{cases} \Rightarrow (*) \begin{cases} z = 0 \\ \text{OU} \\ x = y = 0 \end{cases}$$

COMO $f(x,y,0) = f(0,0,z) = 0$ E $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0$, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0$, NENHUM DOS PONTOS DESCRITOS EM $(*)$ É EXTREMANTE DE f.

NA FRONTEIRA $\partial E = \{(x,y,z) / g(x,y,z) = 1\}$, $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

UM EXTREMANTE DEVE SATISFAZER $\nabla f = \lambda \nabla g$ $\therefore$

$$\begin{cases} yz^2 = 2\lambda x \\ xz^2 = 2\lambda y \\ 2xyz = 2\lambda z \end{cases}$$

COMO $f(0,y,z) = f(x,0,z) = f(x,y,0) = 0$, PODEMOS SUPOR $xyz \neq 0$

$$\frac{yz^2}{2x} = \frac{xz^2}{2y} = xy \Rightarrow$$

$x^2 = y^2$, $z^2 = 2y^2$ $\therefore$ $x = y = \pm\frac{1}{2}$, $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\therefore$ OS CANDIDATOS A EXTREMANTES SÃO DA FORMA

$$\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

COMO $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{8}=f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{8}=f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ E PELO TEO. DE WEIERSTRASS, f ADMITE EXTREMANTES GLOBAIS, TEMOS QUE OS VALORES MÍNIMO E MÁXIMO SÃO $-1/8$ E $1/8$, RESPECTIVAMENTE. OS PONTOS

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

SÃO MÁXIMOS GLOBAIS E OS PONTOS

$$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

SÃO MÍNIMOS GLOBAIS.

Questão 3 **(3 pontos)** Mostre que para quaisquer números positivos x, y vale a desigualdade

$$x^2y^3 \le \frac{2^2 3^3}{5^5}(x+y)^5.$$

Verifique que a desigualdade acima é uma igualdade se e só se $3x = 2y$. Você conseguiria encontrar uma versão semelhante desta desigualdade para quaisquer m, n inteiros positivos (em lugar de 2 e 3, respectivamente)? Valendo mais **2 pontos**!

DA DESIGUALDADE ENTRE AS MÉDIAS,

$$\frac{x+y}{5} = \frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{y}{3}+\frac{y}{3}}{5}$$

$$\geq \sqrt[5]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{3}\cdot\frac{y}{3}\cdot\frac{y}{3}}$$

$$= \sqrt[5]{\frac{x^2y^3}{2^2 3^3}}$$, COM IGUALDADE SSS $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$, i.e., $3x = 2y$.

$$\therefore \frac{x^2y^3}{2^2 3^3} \leq \frac{(x+y)^5}{5^5} \Rightarrow x^2y^3 \leq \frac{2^2 3^3}{5^5}(x+y)^5.$$ //

CASO GERAL

$$\frac{x+y}{m+n} = \frac{\overbrace{\left(\frac{x}{m}+\cdots+\frac{x}{m}\right)}^{m \text{ VEZES}}+\overbrace{\left(\frac{y}{n}+\cdots+\frac{y}{n}\right)}^{n \text{ VEZES}}}{m+n}$$

$$\geq \sqrt[m+n]{\left(\frac{x}{m}\right)^m\cdot\left(\frac{y}{n}\right)^n}$$, COM IGUALDADE SSS $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$.

$$\therefore \frac{x^m y^n}{m^m n^n} \leq \frac{(x+y)^{m+n}}{(m+n)^{m+n}} \Rightarrow x^m y^n \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}(x+y)^{m+n}.$$

Questão 4 **(3 pontos)** Mostre que

$$\frac{x}{y} + \frac{\sqrt{y}}{z} + \frac{z^2}{x} \geq 2\sqrt{2},$$

para quaisquer números positivos x, y, z. Determine todas as triplas (x, y, z) que tornam a desigualdade acima uma igualdade.

$$\frac{\frac{x}{y} + \frac{\sqrt{y}}{z} + \frac{z^2}{x}}{4} = \frac{\frac{x}{y} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{y}}{z} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{y}}{z} + \frac{z^2}{x}}{4}$$

$$\geq \sqrt[4]{\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{2}\frac{\sqrt{y}}{z} \cdot \frac{1}{2}\frac{\sqrt{y}}{z} \cdot \frac{z^2}{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$, COM IGUALDADE SSS

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{y}}{z} = \frac{z^2}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{y} + \frac{\sqrt{y}}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

IGUALDADE

- $\frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = y/\sqrt{2}$
- $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{y}}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{y}}{z} = \sqrt{2}$

  $\therefore \quad z = \sqrt{y/2}$
- $\frac{z^2}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow z^2 = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{y/\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{y}{2}$

  $\therefore \quad z = \sqrt{y/2}$

  (SISTEMA COMPATÍVEL)

A DESIGUALDADE SE TORNA UMA IGUALDADE NO CASO

$(x, y, z) = \left(y/\sqrt{2},\ y,\ \sqrt{y/2}\right)$, $y > 0$