UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM222 - Análise III - Período de retomada 2020
Prof. Zeca Eidam

Lista 1

1. Consideremos o espaço vetorial $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ formado pelas aplicações lineares $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ e fixemos em ambos os espaços a norma euclidiana.

   ① Mostre que para qualquer $T\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ valem as seguintes igualdades

   $$\sup_{|x|=1}|Tx| = \sup_{|x|\leq 1}|Tx| = \sup_{x\neq 0}\frac{|Tx|}{|x|} = \inf\left\{C>0 : |Tx|\leq C|x|,\ x\in\mathbb{R}^n\right\}.$$

   ② Mostre que $\|T\| \doteq \sup_{|x|=1}|Tx|$ define uma norma em $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$.

   ③ Se $m=n$, mostre que $\|ST\|\leq\|S\|\|T\|$, para quaisquer $S,T\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$.

   ④ Se $m=n$ e T é simétrico positivo, então existe uma base ortonormal $\{u_1,\dots,u_n\}\subset\mathbb{R}^n$ tal que $Tu_j\lambda_j u_j$, com $\lambda_j\geq 0$ (autovalores), para cada $j=1,\dots,n$. Mostre que, neste caso, $\|T\|=\max\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$.

   ⑤ No caso m,n quaisquer, mostre que a expressão

   $$|||T||| \doteq \|T^*T\|$$

   também define uma norma em $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Mostre que $|||T|||$ é o maior *valor singular* de T. (Procure saber o que é isto...)

2. Seja $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ uma sequência de aplicações lineares e admita que, para cada $x\in\mathbb{R}^n$, existe $\lim_{k\to\infty}T_kx$.

   ① Definindo $Tx\doteq\lim_{k\to\infty}T_kx$, $x\in\mathbb{R}^n$, mostre que T é linear.

   ② Mostre que $\|T_k-T\|\to 0$.

3. Dada $T\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)\doteq\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, definimos

   $$e^T \doteq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k}{k!}.$$

   ① Mostre que a série converge absoluta e uniformemente em qualquer subconjunto limitado de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

   ② Mostre que se $ST=TS$ então $e^{T+S}=e^T\cdot e^S$.

   ③ Mostre que para qualquer $T\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, e^T é inversível e $(e^T)^{-1}=e^{-T}$.

4. Mostre que todo $T\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ é limite de uma sequência de operadores inversíveis (Use a forma triangular para a uma matriz $n\times n$).

5. Consideremos $m, n \in \mathbb{N}$ e o espaço produto $V \doteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ munido da estrutura usual de espaço vetorial (isomorfo a $\mathbb{R}^{m+n}$).

   ① Fixadas normas $|\cdot|_a$ e $|\cdot|_b$ em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, mostre que as seguintes expressões definem normas em V:

      i. $|(x,y)| = |x|_a + |y|_b$;
      ii. $|(x,y)| = (|x|_a^2 + |y|_b^2)^{1/2}$;
      iii. $|(x,y)| = (|x|_a^p + |y|_b^p)^{1/p}$; $p \geq 1$;
      iv. $|(x,y)| = \max\{|x|_a, |y|_b\}$.

   ② Uma aplicação $B : V \to \mathbb{R}^p$ é dita *bilinear* se para todos $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, as aplicações $y \mapsto B(x,y)$ e $x \mapsto B(x,y)$ forem lineares (B é linear *em cada variável*). Mostre que para qualquer aplicação deste tipo, existe $C > 0$ tal que $|B(x,y)| \leq C|x||y|$, para qualquer $(x,y) \in V$.

   ③ Mostre que uma aplicação bilinear é contínua.

   ④ Defina o conceito de aplicação *multilinear* e estude a continuidade de uma tal aplicação.

6. Mostre que uma aplicação linear $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é injetora se e só se existe $c > 0$ tal que $|Tx| \geq c|x|$, $x \in \mathbb{R}^n$.

7. Mostre que as aplicações a seguir são contínuas:

   ① $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \ni T \mapsto Tx \in \mathbb{R}^m$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$;

   ② $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \ni (T, x) \mapsto Tx \in \mathbb{R}^m$;

   ③ $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \ni T \mapsto p(T) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$

8. Mostre que os conjuntos abaixo são abertos:

   (a) $X = \{u \in \mathbb{R}^n : |1977u - \operatorname{proj}_{e_1} u| < 1\}$, onde $\operatorname{proj}_{e_1} u$ denota a projeção ortogonal de u na direção de e_1.

   (b) $X = \{T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : |T^2u - 2021Tu + 13T^4u| < 137\}$, onde $u \in \mathbb{R}^n$ é um vetor fixado.

   (c) $X = \{(T, u) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n : |Tu - e^T u| < 11\}$

9. Mostre que os conjuntos abaixo são fechados:

   (a) $X = \{u \in \mathbb{R}^n : |u - \operatorname{proj}_{e_2} u| \leq 1\}$, onde $\operatorname{proj}_{e_2} u$ denota a projeção ortogonal de u na direção de e_2.

   (b) $X = \{T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : |12T^4u - 2003Tu + 12T^3u| \leq 1\}$, onde $u \in \mathbb{R}^n$ é um vetor fixado.

   (c) $X = \{(T, u) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n : |e^T u| \leq 11\}$

10. Se $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ e $\|T\| < 1$, mostre que o operador $I - T$ é inversível e seu inverso é dado por

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

    Pode não parecer, mas você já viu isso no PSE...

11. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

① Se $m \geq n$, dado $\varepsilon > 0$ existe $S \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ injetora tal que $\|S - T\| < \varepsilon$.

② Se $m \leq n$, dado $\varepsilon > 0$ existe $S \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ sobrejetora tal que $\|S - T\| < \varepsilon$.

③ Se $m = n$, dado $\varepsilon > 0$ existe $S \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ inversível tal que $\|S - T\| < \varepsilon$.