UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM222 - Análise III - Período de retomada 2020
Prof. Zeca Eidam

Lista 2

Nos exercícios a seguir, B é uma bola em $\mathbb{R}^n$.

1. Seja $f : B \to \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas parciais em todos os pontos. Mostre que se $f_{x_i} \equiv 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, então f é constante. Por quais conjuntos podemos substituir B de forma que o resultado continue válido?

2. Seja $f : B \to \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas parciais em todos os pontos e suponhamos que exista uma constante $C > 0$ tal que $|f_{x_i}(x)| \le C$, para todos $x \in U$ e $i = 1, \ldots, n$. Mostre que $|f(x) - f(y)| \le M|x - y|$, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$.

3. Seja $f(x, y) = x^{x^{x^{x^y}}} + (\ln x)(\operatorname{sen}(xy) + \arctan(1 - x^3 y))$, $x > 0$. Calcule $f_y(1, y)$.

4. Sejam $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínuas e considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x, y) = \int_0^x P(t, 0)\,dt + \int_0^y Q(x, t)\,dt$$
   ① Mostre que $f_y = Q$.
   ② Supondo que $Q_x = P_y$, mostre que $f_x = P$, ou seja, $\nabla f = (P, Q)$. f é única?
   ③ Determine f nos casos $P(x, y) = x$, $Q(x, y) = y^2$ e $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = x$.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \ne (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$
   ① Mostre que $f_y(x, 0) = x$ e $f_x(0, y) = -y$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.
   ② Conclua que $f_{xy}(0, 0) \ne f_{yx}(0, 0)$.