UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM203 - Geometria Diferencial - Período Especial 2020/1
Prof. Zeca Eidam

Lista 1 - Superfícies em $\mathbb{R}^3$

1. Verifique se os subconjuntos abaixo são ou não superfícies em $\mathbb{R}^3$, exibindo parametrizações para aqueles que forem superfícies:

   ① O cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$

   ② O cone positivo $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\ z \geq 0\}$

   ③ O elipsóide $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{a^2} = 1\}$, $a, b, c > 0$

   ④ O subconjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : zx^2 + zy^2 + z^3 = z\}$

2. Considere $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2\}$.

   ① Mostre que S é uma superfície.

   ② Mostre que
   $$x_1(u, v) = (u + v, u - v, 4uv), (u, v) \in \mathbb{R}^2$$
   e
   $$x_2(u, v) = (u \cosh v, u \sinh v, u^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2\ u \neq 0$$
   são para parametrizações de S. Determine a imagem destas parametrizações.

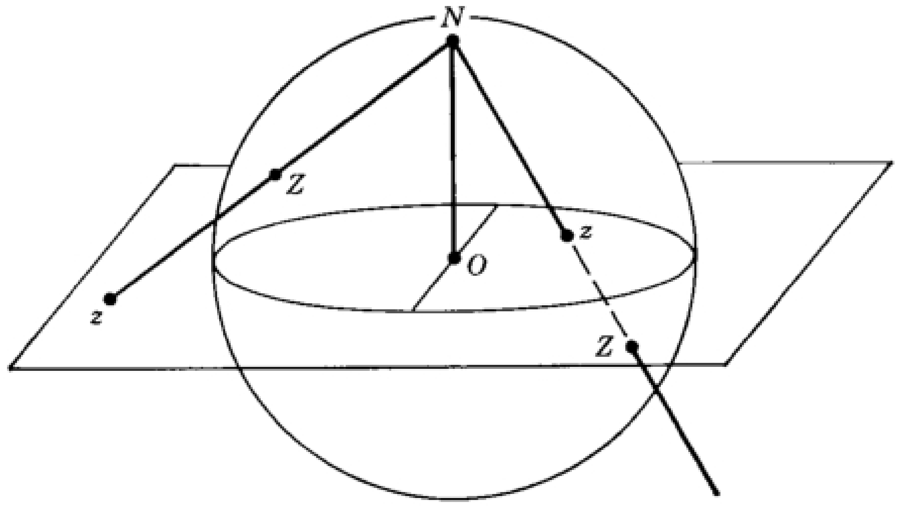
3. Considere no plano yz o círculo $C : (y - a)^2 + z^2 = r^2$ de raio $r < 0$ e a superfície T obtida a partir da rotação de C em torno da reta $r : y = 0$. T é chamada de *toro*.

   ① Encontre uma parametrização para T utilizando como um dos parâmetros o ângulo θ de rotação em torno da reta r.

   ② Mostre que T é uma superfície.

   ③ Encontre uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que tenha $c = 0$ como valor regular e tal que $T = f^{-1}(0)$.

4. Neste exercício, vamos descrever uma parametrização da esfera unitária através de uma importante aplicação chamada de *projeção estereográfica*. Para tanto, considere S^2 a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$ determinada pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $N = (0, 0, 1) \in S^2$ o polo norte.



① Para cada $P = (x, y, z) \in S^2 \setminus \{N\}$, seja r a semirreta que parte de N e passa pelo ponto P. Chamemos de $F(P)$ o ponto de intersecção de r com o plano $z = 0$. Encontre as coordenadas de $F(P)$.

② Mostre que $F : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ é uma aplicação bijetora e determine $G \doteq F^{-1}$.

③ Mostre que G é uma parametrização de $S^2 \setminus \{N\}$ (imersão).

④ Usando uma ideia totalmente análoga (trocando o polo norte pelo polo sul S), é possível obter uma parametrização de $S^2 \setminus \{S\}$. Assim, vemos que é possível cobrir a esfera toda com somente duas parametrizações.