UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM042 - Cálculo III - Período Especial II - 2020
Prof. José Carlos Eidam

Lista 1

☆ Integrais duplas

1. Calcule as seguintes integrais duplas:

   (a) $\displaystyle\int\int_R (2y^2 - 3xy^3)\,dx\,dy$, onde $R = \{(x,y) : 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 3\}$.

   (b) $\displaystyle\int\int_R x\operatorname{sen} y\,dx\,dy$, onde $R = \{(x,y) : 1 \le x \le 4, 0 \le y \le \frac{\pi}{6}\}$.

   (c) $\displaystyle\int\int_R \frac{1}{x+y}\,dx\,dy$, onde $R = [1,2] \times [0,1]$.

2. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x\sqrt{x^2 + y}$ e os planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$. .

3. Determine o volume do sólido contido no primeiro octante limitado pelo cilindro $z = 9 - y^2$ e pelo plano $x = 2$.

4. Calcule as seguintes integrais duplas:

   (a) $\displaystyle\int\int_D xy\,dx\,dy$, onde $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$.

   (b) $\displaystyle\int\int_D (x^2 - 2xy)\,dx\,dy$, onde $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, \sqrt{x} \le y \le 2 - x\}$.

   (c) $\displaystyle\int\int_D e^{x/y}\,dx\,dy$, onde $D = \{(x,y) : 1 \le y \le 2, y \le x \le y^3\}$.

   (d) $\displaystyle\int\int_D x\cos y\,dx\,dy$, onde D é a região limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$.

   (e) $\displaystyle\int\int_D 4y^3\,dx\,dy$, onde D é a região limitada por $y = x - 6$ e $y^2 = x$.

   (f) $\displaystyle\int\int_D xy\,dx\,dy$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada pela circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1.

   (g) $\displaystyle\int\int_D (x^2\operatorname{tg} x + y^3 + 4)\,dx\,dy$, onde $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 2\}$.

5. Determine o volume do sólido S em cada um dos seguintes casos:

   (a) S é limitado superiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e sua projeção no plano xy é a região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$.

   (b) S é limitado superiormente por $z = xy$ e sua projeção no plano xy é o triângulo de vértices $(1,1)$, $(4,1)$ e $(1,2)$.

(c) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2+z^2=9$ e pelos planos $x=0$, $y=0$, $z=0$ e $x+2y=2$.

(d) S é limitado pelos planos $x=0$, $y=0$, $z=0$ e $x+y+z=1$.

(e) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2+y^2=1$ e pelos planos $y=z$, $x=0$ e $z=0$.

(f) S é limitado pelos cilindros $x^2+y^2=r^2$ e $y^2+z^2=r^2$.

6. Calcule as seguintes integrais, invertendo a ordem de integração:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy$ (b) $\displaystyle\int_0^3\int_{y^2}^9 y\cos(x^2)\,dx\,dy$

(c) $\displaystyle\int_0^1\int_{\arcsin y}^{\pi/2}\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx\,dy.$

7. Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\int\int_R x\,dx\,dy$, onde R é o disco de centro na origem e raio 5.

(b) $\displaystyle\int\int_R xy\,dx\,dy$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2=25$.

(c) $\displaystyle\int\int_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$, onde R é a região interior à cardioide $r=1+\operatorname{sen}\theta$ e exterior à circunferência $r=1$.

(d) $\displaystyle\int\int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, onde D é a região limitada pelas espirais $r=\theta$ e $r=2\theta$, com $0\le\theta\le 2\pi$.

8. Determine o volume da região interior à esfera $x^2+y^2+z^2=4a^2$ e exterior ao cilindro $x^2+y^2=2ax$, com $a>0$.

9. Calcule as integrais iteradas abaixo:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}\,dx\,dy$

(b) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^1 x^3\sin(y^3)\,dy\,dx$

☆ Respostas

(1) (a) $-\frac{585}{8}$, (b) $\frac{15}{4}(2-\sqrt{3})$, (c) $\ln\frac{27}{16}$; **(2)** $\frac{4}{15}(2\sqrt{2}-1)$; **(3)** 36; **(4)** (a) $\frac{1}{12}$, (b) $-\frac{19}{42}$, (c) $\frac{1}{2}e^4-2e$, (d) $(1-\cos 1)/2$, (e) $\frac{500}{3}$, (f) $\frac{1}{8}$, (g) 8π; **(5)** (a) $\frac{6}{35}$, (b) $\frac{31}{8}$, (c) $\frac{1}{6}(17\sqrt{5}-27)+\frac{9}{2}\arcsin\frac{2}{3}$, (d) $\frac{1}{6}$, (e) $\frac{1}{3}$, (f) $\frac{16}{3}r^3$; **(6)** (a) $(e^9-1)/6$, (b) $\frac{1}{4}\sin 81$, (c) $(2\sqrt{2}-1)/3$; **(7)** (a) 0, (b) $\frac{609}{8}$, (c) 2, (d) $24\pi^5$;