UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM042 - Cálculo III - Período Especial II - 2020
Prof. José Carlos Eidam

Lista 2

☆ Integrais triplas

1. Calcule as integrais triplas abaixo:

   (a) $\displaystyle\int\int\int_E yz\,dxdydz$, onde $E = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 1, 0 \le y \le 2z, 0 \le x \le z+2\}$.

   (b) $\displaystyle\int\int\int_E y\,dxdydz$, onde E é a região abaixo do plano $z = x+2y$ e acima da região no plano xy limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$.

   (c) $\displaystyle\int\int\int_E xy\,dxdydz$, onde E é o tetraedro sólido com vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ e $(0,0,3)$.

   (d) $\displaystyle\int\int\int_E z\,dxdydz$, onde E é limitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y+z = 1$ e $x+z = 1$.

   (e) $\displaystyle\int\int\int_E x\,dxdydz$, onde E é limitada pelo parabolóide $x = 4y^2+4z^2$ e pelo plano $x = 4$.

   (f) $\displaystyle\int\int\int_E (x^2+y^2)\,dxdydz$, onde E é a região limitada pelo cilindro $x^2+y^2 = 4$ e pelos planos $z = -1$ e $z = 2$.

   (g) $\displaystyle\int\int\int_E y\,dxdydz$, onde E é a região entre os cilindros $x^2+y^2 = 4$ e $x^2+y^2 = 1$, limitada pelo plano xy e pelo plano $z = x+2$.

   (h) $\displaystyle\int\int\int_E x^2\,dxdydz$, onde E é o sólido limitado pelo cilindro $x^2+y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2+4y^2$.

   (i) $\displaystyle\int\int\int_E (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, onde E é a bola unitária $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

   (j) $\displaystyle\int\int\int_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, onde E é a região interior ao cone $\varphi = \pi/6$ e à esfera $\rho = 2$.

   (k) $\displaystyle\int\int\int_E x\,dxdydz$, onde E é o conjunto $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z^2 \le 1$, $x \ge 0$.

2. Determine o volume da região R limitada pelos parabolóides $z = x^2+y^2$ e $z = 36-3x^2-3y^2$.

3. Determine o volume do tetraedro delimitado pelos planos coordenados e pelo plano $2x+y+z = 4$.

4. Determine o volume do sólido delimitado pela superfície $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 9$ e $z = 4$.

5. Determine o volume do sólido delimitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e pelos planos $y + z = 5$ e $z = 1$.

6. Calcule o volume do sólido delimitado pelo parabolóide $x = y^2 + z^2$ e pelo plano $x = 16$.

7. Calcule o volume da região limitada pelo elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

8. Use a transformação $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$ para calcular o volume da região limitada pela superfície $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ e pelos planos coordenados.

9. Determine a massa de um hemisfério sólido H de raio a se a densidade em qualquer ponto é proporcional a sua distância ao centro da base.

10. Calcule a massa do sólido $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq a\}$, $a > 0$ fixado, sendo a densidade $\delta(x, y, z) = z$.

11. Determine a massa e o centro de massa do cubo $Q = [0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ cuja densidade é dada pela função $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

12. Determine a massa e o centro de massa do sólido S limitado pelo parabolóide $z = 4x^2 + 4y^2$ e pelo plano $z = a$ ($a > 0$), se S tem densidade constante K.

13. Determine a massa e o centro de massa do sólido S limitado pelo parabolóide $z = 4x^2 + 4y^2$ e pelo plano $z = a$ ($a > 0$), se S tem densidade constante K.

☆ **Respostas**

(1) (a) $\frac{7}{5}$, (b) $\frac{5}{28}$, (c) $\frac{1}{10}$, (d) $\frac{1}{12}$, (e) $\frac{8\pi}{3}$; (f) 40π, (g) 0, (h) $2\pi/5$; (i) $4\pi/5$, (j) $4\pi(2-\sqrt{3})$, (k) 3π;
(2) 162π;
(3) $16/3$;
(4) 144;
(5) 36π
(7) $\frac{4}{3}\pi abc$;
(8) $1/90$;
(9) $K\pi a^4/2$, onde K é a constante de proporcionalidade;
(10) $\frac{\pi}{4}(r^2 - a^2)^2$;
(11) a^5, $(7a/12, 7a/12, 7a/12)$;
(12) $\pi K a^2/8$, $(0, 0, 2a/3)$;
(13) $\pi K a^2/8$, $(0, 0, 2a/3)$;