UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM042 - Cálculo III - Período Especial 2/2020
Prof. Zeca Eidam

Lista 3

✰ Integrais de linha

1. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo da curva indicada:

   (a) $\int_\gamma x\,ds$, $\gamma(t) = (t^3, t)$, $0 \le t \le 1$.

   (b) $\int_\gamma xy^4\,ds$, γ é a semi-circunferência $x^2 + y^2 = 1$, $x \ge 0$.

   (c) $\int_\gamma xyz\,ds$, $\gamma(t) = (2t, 3\sin t, 3\cos t)$, $0 \le t \le \pi/2$.

   (d) $\int_\gamma xy^2 z\,ds$, γ é o segmento de reta de $(1,0,1)$ a $(0,3,6)$.

   (e) $\int_\gamma (x - 2y^2)\,dy$, γ é o arco da parábola $y = x^2$ de $(-2,4)$ a $(1,1)$.

   (f) $\int_\gamma xy\,dx + (x-y)\,dy$, γ consiste dos segmentos de reta de $(0,0)$ a $(2,0)$ e de $(2,0)$ a $(3,2)$.

   (g) $\int_\gamma x^3 y^2 z\,dz$, $\gamma(t) = (2t, t^2, t^2)$, $0 \le t \le 1$.

   (h) $\int_\gamma z^2\,dx - z\,dy + 2y\,dz$, γ consiste dos segmentos de reta de $(0,0,0)$ a $(0,1,1)$, de $(0,1,1)$ a $(1,2,3)$ e de $(1,2,3)$ a $(1,2,4)$.

   (i) $\int_\gamma 2x\,dx + (z^2 - y^2)\,dz$, onde γ é o arco circular dado por $x = 0$, $y^2 + z^2 = 4$, de $(0,2,0)$ a $(0,0,2)$ $y \ge 0$;

2. Calcule as seguintes integrais de linha:

   (a) $\oint_\gamma x^2 y\,dx + xy^3\,dy$, onde γ é o quadrado com vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$, orientado positivamente;

   (b) $\oint_\gamma (x+2y)\,dx + (x-2y)\,dy$, onde γ consiste do arco da parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ e do segmento de reta de $(1,1)$ a $(0,0)$.

   (c) $\oint_\gamma (y + e^{\sqrt{x}})\,dx + (2x + \cos y^2)\,dy$, onde γ é a fronteira da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ percorrida no sentido anti-horário.

   (d) $\oint_\gamma x^2\,dx + y^2\,dy$, γ é a curva $x^6 + y^6 = 1$, sentido anti-horário.

(e) $\oint_\gamma xy\,dx + (2x^2+x)\,dy$, γ consiste do segmento de reta unindo $(-2,0)$ a $(2,0)$ e da semi-circunferência $x^2+y^2=4$, $y\geq 0$, orientada positivamente.

(f) $\oint_\gamma 2xy\,dx + (x^2+x)\,dy$, γ é a cardióide $\rho = 1+\cos\theta$ orientada positivamente.

(g) $\oint_\gamma (xy+e^{x^2})\,dx + (x^2-\ln(1+y))\,dy$, γ consiste do segmento de reta de $(0,0)$ a $(\pi,0)$ e do arco da curva $y=\ \text{sen}x$, orientada positivamente.

(h) $\oint_\gamma (y^2-x^2y)dx + xy^2dy$, γ consiste do arco de circunferência $x^2+y^2=4$ de $(2,0)$ a $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, e dos segmentos de reta de $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ a $(0,0)$ e de $(0,0)$ a $(2,0)$.

(i) $\int_\gamma 5x^2ydx + (7x^3+e^y)dy$, sendo γ a elipse $16x^2+25y^2=100$, percorrida de $(0,-2)$ até $(0,2)$, $x>0$.

(j) $\int_\gamma \left(2xe^y - x^2y - \dfrac{y^3}{3}\right)dx + (x^2e^y+\sin y)\,dy$, sendo γ a circunferência de equação $x^2+y^2-2x=0$, percorrida de $(0,0)$ até $(2,0)$ com $y>0$.

(k) $\oint_\gamma \dfrac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, onde γ é a circunferência $x^2+y^2=a^2$, percorrida uma vez no sentido horário;

(l) $\oint_\gamma \sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy$, sendo γ a fronteira da região limitada por $x=0$, $y=1$ e $y=x^2$, percorrida uma vez no sentido horário;

3. Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ para:

   (a) $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} + (x^2+y^2)\vec{j}$, onde γ é o arco de circunferência $\gamma(t) = (t,\sqrt{4-t^2})$, ligando $(-2,0)$ a $(2,0)$;

   (b) $\vec{F}(x,y) = 2(x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$, onde γ é a elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, percorrida uma vez em sentido anti-horário.

   (c) $\vec{F}(x,y) = 2\arctan\dfrac{y}{x}\vec{i} + [\ln(x^2+y^2)+2x]\vec{j}$ onde γ é a fronteira do retângulo $[1,2]\times[-1,1]$ percorrida uma vez no sentido anti-horário.

4. Determine o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}(x,y) = (x,y+2)$ ao mover um ponto ao longo da ciclóide $\gamma(t) = (t-\sin t, 1-\cos t)$, $0\leq t\leq 2\pi$.

5. Seja D uma região de $\mathbb{R}^2$ com D e ∂D satisfazendo as hipóteses do Teorema de Green. Mostre que a área de D coincide com a integral $\int_{\partial D} x\,dy = \int_{\partial D} -y\,dx$.

   Use este fato para calcular a área dos subconjuntos abaixo:

   (a) $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$;

   (b) $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^{2/3}+y^{2/3}\leq a^{2/3}\}$.

6. Determine a área da região limitada pela hipociclóide dada por $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

7. Neste exercício, vamos mostrar como calcular a área de um polígono irregular.

   (a) Se γ é o segmento de reta ligando o ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2), mostre que

   $$\int_\gamma x\,dy - y\,dx = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

   (b) Em ordem anti-horária, os vértices de um polígono são (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_N, y_N). Mostre que sua área é dada por

   $$A = \frac{1}{2}[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \ldots + (x_{N-1} y_N - x_N y_{N-1}) + (x_N y_1 - x_1 y_N)].$$

   (c) Determine a área do pentágono de vértices $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(0,2)$ e $(-1,2)$.

8. Calcule

   (a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$ sendo γ a curva fronteira da região determinada pelas curvas $y^2 = 2(x+2)$ e $x = 2$, orientada no sentido horário.

   (b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$ sendo γ a curva $y = x^2 + 1$, $-1 \le x \le 2$, percorrida do ponto (-1,2) a (2,5).

   (c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y\,dx - (x-1)\,dy}{(x-1)^2 + y^2}$ sendo γ a circunferência $x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido horário.

   (d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{x^2 y\,dx - x^3\,dy}{(x^2 + y^2)^2}$ sendo γ a fronteira da região $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1, |y| \le 1\}$, orientada no sentido horário.

9. Verifique que a integral

   $$\int_\gamma 2x \sin y\,dx + (x^2 \cos y - 3y^2)\,dy,$$

   onde γ é uma curva ligando $(-1,0)$ a $(5,1)$, é independente do caminho e calcule o seu valor.

10. Seja γ uma curva plana simples, fechada e lisa por partes percorrida uma vez no sentido horário. Encontre todos os valores possíveis para

    (a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$

    (b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{4x^2 + 9y^2}$

11. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\vec{i} - 7yz\vec{j} + 2xz^2\vec{k}$ e γ é a curva ligando o ponto $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$ nos seguintes casos:

    (a) $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$;

    (b) γ é composta dos segmentos de reta de $(0,0,0)$ a $(1,0,0)$, depois a $(1,1,0)$ e depois a $(1,1,1)$;

12. Sejam as curvas γ_1 a circunferência $x^2+y^2=\dfrac{1}{16}$ percorrida no sentido anti-horário, γ_2 a circunferência $x^2+y^2=4$, percorrida no sentido anti-horário e γ_3 a curva formada pela união das três seguintes circunferências: $(x-1)^2+y^2=\dfrac{1}{9}$, $(x+1)^2+y^2=\dfrac{1}{9}$, ambas percorridas no sentido horário e $x^2+y^2=\dfrac{1}{9}$ percorrida no sentido anti-horário. Se $I_k=\displaystyle\int_{\gamma_k} P\,dx+Q\,dy$ onde

$$P(x,y)=-y\left(\frac{1}{(x-1)^2+y^2}+\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{(x+1)^2+y^2}\right)$$

e

$$Q(x,y)=\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$$

então calcule I_1, I_2 e I_3.

13. Calcule $\displaystyle\int_\gamma F\,d\vec{r}$ onde

$$\vec{F}=\left(\frac{-y}{x^2+\frac{y^2}{9}}+y,\frac{x}{x^2+\frac{y^2}{9}}+3x\right)$$

nos seguintes casos:

(a) γ é a curva $(x-1)^2+(y-2)^2=4$, percorrida uma vez no sentido horário.

(b) γ é a curva $(x-1)^2+y^2=4$, percorrida uma vez no sentido horário.

14. Determine todos os valores possíveis da integral

$$\int_{(1,0)}^{(2,2)}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$$

sobre um caminho que não passe pela origem.

15. Em cada caso abaixo, determine se $\vec{F}$ é ou não campo gradiente no domínio indicado. Em caso afirmativo, determine o potencial de $\vec{F}$.

(a) $\vec{F}(x,y)=x\vec{i}+x\vec{j}$ em $\mathbb{R}^2$

(b) $\vec{F}(x,y)=(2xe^y+y)\vec{i}+(x^2e^y+x-2y)\vec{j}$ em $\mathbb{R}^2$

(c) $\vec{F}(x,y,z)=(2x^2+8xy^2)\vec{i}+(3x^3y-3xy)\vec{j}+-(4z^2y^2+2x^3z)\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$

(d) $\vec{F}(x,y,z)=(x+z)\vec{i}-(y+z)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$

(e) $\vec{F}(x,y,z)=(y^2\cos x+z^3)\vec{i}-(4+2y\,\mathrm{sen}x)\vec{j}+(3xz^2+2)\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$

(f) $\vec{F}(x,y)=\dfrac{-y\vec{i}+x\vec{j}}{x^2+y^2}$, em $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

(g) $\vec{F}(x,y)=\dfrac{-y\vec{i}+x\vec{j}}{x^2+y^2}$, em $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0 \text{ se } y=0\}$

(h) $\vec{F}(x,y)=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}}{x^2+y^2}$, em $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

16. Seja o campo $\vec{F}(x,y) = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2+y^2}$ e γ a curva dada por $\gamma(t) = (e^t, \sin t)$ para $0 \le t \le \pi$. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} d\vec{r}$.

17. Calcule as integrais:

   (a) $\displaystyle\int_\gamma 7x^6 y\,dx + x^7\,dy$ sendo $\gamma(t) = (t, e^{t^2-1})$, onde $t \in [0,1]$.

   (b) $\displaystyle\int_\gamma [\ln(x+y^2) - y]\,dx + [2y\ln(x+y^2) - x]\,dy$ sendo γ a curva $(x-2)^2 + y^2 = 1$ com $y \ge 0$ orientada no sentido horário.

   (c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$ sendo γ a curva dada por $x(t) = \cos^3 t$ e $y(t) = \text{sen}^3 t$ com $y \ge 0$ ligando os pontos $(1,0)$ e $(0,1)$, nessa ordem.

   (d) $\displaystyle\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$.

   (e) $\displaystyle\int_\gamma \sin(yz)\,dx + xz\cos(yz)\,dy + xy\cos(yz)\,dz$, sendo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ para $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

18. Mostre que as integrais abaixo independem do caminho e calcule-as.

   (a) (a) $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(a,b)} 2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$.

   (b) (b) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(a,b)} \text{sen}\,y\,dx + x\cos y\,dy$.

19. Calcule $\displaystyle\int_A^B \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x^2+y^2+z^2}$, onde o ponto A pertence à esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ e o ponto B pertence a esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$.

20. Um campo de vetores $\vec{F}$ em $\mathbb{R}^2$ se diz *radial* (ou *central*) se existe uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F}(x,y) = g(|\vec{r}|)\vec{r}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Suponha que g é de classe C^1. Mostre que $\vec{F}$ é conservativo.

✰ Respostas

(1) (a) $(10\sqrt{10}-1)/54$, (b) $2/5$, (c) $9\sqrt{13}\pi/4$, (d) $3\sqrt{35}$, (e) 48, (f) $17/3$, (g) $16/11$, (h) $77/6$; (i) $-8/3$,
(2) (a) $-1/12$, (b) $-1/6$, (c) $1/3$, (d) 0, (e) 2π, (f) $3\pi/2$, (g) π, (h) $\pi + (16/3)((1/\sqrt{2})-1)$, (i) $e^{-2} - e^2 + \frac{125}{2}\pi$, (j) $4 - \frac{3\pi}{4}$, (k) 2π;
(3) (a) 2π, (b) πab; (c) 4;
(4) $2\pi^2$;
(5) (a) πab;
(6) $3\pi/8$;
(7) (c) $9/2$;
(8) (a) -2π; (b) $(1/2)\ln(29/5)$; (c) 2π; (d) π;
(9) $25\sin 1 - 1$;
(10) (a) 0 ou -2π; b) 0 ou $-\pi/3$;

(11) (a) $-11/15$, (b) 1;
(12) $I_1 = 2\pi$; $I_2 = 6\pi$; $I_3 = -2\pi$;
(13) (a) -8π; (b) -14π;
(14) $2k\pi$, com k inteiro;
(15) (a) não; (b) $\varphi = x^2e^y + xy - y^2 + c$; (c) não; (d) $\varphi = x^2/2 - y^2/2 + zx - zy + c$;
(e) $\varphi = y^2 \sin x + xz^3 - 4y + 2z + c$; (f) não; (g) $\varphi = \arctan(y/x)$; (h) $\varphi = \ln(x^2 + y^2)/2 + c$;
(16) π;
(17) (a) 1, (b) $3\ln 3 - 2$, (c) $\frac{-\pi}{2}$; (d) -2; (e) $(\sqrt{2}/2)\sin\left(\sqrt{2}\pi/8\right)$
(18) (a) $a^2b - b^3/3 - 2/3$; (b) $a\sin b$;
(19) $\ln 2$.