

Lista 4

☆ Integrais de superfície

1. Determine uma representação paramétrica de cada uma das superfícies descritas abaixo e calcule sua área:

- (a) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interior ao cone $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$;
- (b) S é a parte do cilindro $x^2 + z^2 = 1$ compreendida entre os planos $y = -1$ e $y = 3$;
- (c) S é a parte do plano $z = 2x + 3y$ que é interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 16$;
- (d) S é a parte do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$;
- (e) S é a parte do cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está no interior do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, onde $a > 0$;
- (f) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está no interior do cilindro $x^2 + y^2 = ax$, onde $a > 0$;
- (g) S é o toro obtido pela rotação da circunferência no plano xz com centro $(b, 0, 0)$ e raio $a < b$ em torno do eixo z ;
- (h) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com $z \geq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{3}}$.

2. Sejam $0 < a < b$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva com derivada contínua. Determine equações paramétricas das superfícies geradas pela rotação da curva $y = f(x)$ em torno do eixo x e do eixo y . Calcule a área da superfície em cada caso.

3. Calcule as seguintes integrais de superfície:

- (a) $\iint_S y dS$, onde S é a superfície dada por $z = x + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$;
- (b) $\iint_S x^2 dS$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
- (c) $\iint_S y dS$, onde S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$, que está contido no primeiro octante;
- (d) $\iint_S xz dS$, onde S é o triângulo com vértices $(1,0,0)$, $(1,1,1)$ e $(0,0,2)$;
- (e) $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, onde S é a parte do parabolóide $x = 4 - y^2 - z^2$ contida no semi-espço $x \geq 0$;
- (f) $\iint_S yz dS$, onde S é a parte do plano $z = y + 3$ limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$;

- (g) $\iint_S xyz dS$, onde S é a fronteira da região limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$ e $x + y = 2$;
- (h) $\iint_S z(x^2 + y^2) dS$, onde S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$;
- (i) $\iint_S xyz dS$, onde S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ interior ao cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- (j) $\iint_S \sqrt{\frac{2x^2 + 2y^2 - 2}{2x^2 + 2y^2 - 1}} dS$, onde S é a parte de $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ com $1 \leq z \leq 3$;
- (k) $\iint_S (x + 1) dS$, onde S é a parte de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitada por $x^2 + y^2 = 2y$.

4. Calcule o fluxo de \vec{F} através de S nos seguintes casos:

- (a) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 y, -3xy^2, 4y^3)$ e S é a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$, com $z \geq 0$, orientada de modo que a normal no ponto $(0, 0, 9)$ é \vec{k} ;
- (b) $\vec{F}(x, y, z) = (x, xy, xz)$ e S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$, interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada de modo que seu vetor normal é $\frac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$;
- (c) $\vec{F}(x, y, z) = (-x, -y, z^2)$ e S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, entre os planos $z = 1$ e $z = 2$, orientada de modo que sua normal \vec{N} satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{k} < 0$;
- (d) $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ orientada pela normal exterior;
- (e) $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 3z)$ e S é o hemisfério $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, orientada de modo que a normal no ponto $(0, 0, 4)$ é \vec{k} ;
- (f) $\vec{F}(x, y, z) = (y, 0, -z)$ e S consiste do parabolóide $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 1$ e do disco $x^2 + z^2 \leq 1$, $y = 1$, orientada pela normal exterior;
- (g) $\vec{F}(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$ e S é o cubo de vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ orientado pela normal exterior;
- (h) $\vec{F}(x, y, z) = (x + y, -2y - 1, z)$ e S é o retângulo de vértices $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$, orientado de modo que sua normal \vec{N} satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{j} > 0$;
- (i) $\vec{F}(x, y, z) = (-yz, 0, 0)$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ exterior ao cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, orientado de modo que a normal no ponto $(2, 0, 0)$ é \vec{i} ;
- (j) $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x)$ e S é a parte da superfície $z = \sqrt{4 - x}$, limitada pela superfície cilíndrica $y^2 = x$, orientado de modo que sua normal \vec{N} satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{i} > 0$;
- (k) $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$ e S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, orientada de modo que sua normal \vec{N} satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{k} < 0$;
- (l) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + ye^z, y^2 + ze^x, z^2 + xe^y)$ e S é a fronteira da região limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ entre os planos $z = 0$ e $z = x + 2$, orientada pela normal exterior;
- (m) $\vec{F}(x, y, z) = (3y^2 z^3, 9x^2 y z^2, 4xy^2)$ e S a superfície do cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, orientada pela normal exterior;
- (n) $\vec{F}(x, y, z) = (-xz, y^3 - yz, z^2)$ e S o elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, orientado pela normal exterior;
- (o) $\vec{F}(x, y, z) = (x^3 + y \sin z, y^3 + z \sin x, 3z)$ e S a superfície do sólido limitado pelos hemisférios $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$, orientada pela normal exterior.

- (p) $\vec{F}(x, y, z) = (e^{z^2} \cos(zy^2), x, y)$ e S é a parte de $x^2 + y^2 = 1$ limitada por $z = 0$ e $z = y + 3$, orientada pela normal exterior.
- (q) $\vec{F}(x, y, z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + z\vec{k}$ e S é a parte de $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ com $0 \leq z \leq 1$, orientada pela normal \vec{N} tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} \leq 0$.

5. Calcule:

- (a) $\iint_S xzdy \wedge dz + yzdz \wedge dx + x^2dx \wedge dy$, onde S é a semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$), $z \geq 0$, orientada segundo a normal exterior;
- (b) $\iint_S xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$, onde S é a parte do plano $x + y + z = 2$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua normal satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{j} > 0$;
- (c) $\iint_S xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$, onde S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, contida no semiespaço $z \geq 2y + 1$, orientada de modo que sua normal satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{k} \geq 0$.
- (d) $\iint_S y^2z^2dy \wedge dz + xdz \wedge dx + ydx \wedge dy$, onde S é a parte do cone $z^2 = x^2 + 2y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = y + 3$, orientada com \vec{N} tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} < 0$.
- (e) $\iint_S e^{z^2} \ln(z + y)dy \wedge dz + (x^2 + z^2)dz \wedge dx + zdx \wedge dy$, onde S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ limitada pelo plano $z = y + 4$, orientada com \vec{N} tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} \geq 0$.
- (f) $\iint_S dy \wedge dz + y^3dz \wedge dx + z^2dx \wedge dy$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,
- (g) $\iint_S dy \wedge dz + y^3dz \wedge dx + z^2dx \wedge dy$, onde S é a fronteira da região limitada pelo plano $z = 4$ e pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$, orientada pela normal exterior.
- (h) $\iint_S xdy \wedge dz + yze^{z^2}dz \wedge dx - \frac{e^{z^2}}{2}dx \wedge dy$, onde S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada com a normal unitária \vec{N} tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} > 0$;
- (i) $\iint_S (x^2 + z^3)dy \wedge dz + z^5dz \wedge dx + (e^{x^2+y^2} + z^2)dx \wedge dy$, onde S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ interior ao cone $z^2 = x^2 + y^2$, orientada com a normal exterior;
- (j) $\iint_S \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, onde S é a parte do elipsóide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$, $z \geq 0$, orientada pela normal exterior;

6. Suponha que a superfície S seja o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , orientada de modo que sua normal unitária \vec{N} tenha terceira componente não negativa. Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é um campo de vetores sobre S , mostre que

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \iint_D \left(-P \frac{\partial f}{\partial x} - Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \right) dx dy.$$

7. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma$ em cada um dos seguintes casos:

- (a) $\vec{F}(x, y, z) = (xz, 2xy, 3xy)$ e γ é a fronteira da parte do plano $3x + y + z = 3$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;
- (b) $\vec{F}(x, y, z) = (z^2 + e^{x^2}, y^2 + \ln(1 + y^2), xy + \sin z^3)$ e γ é a fronteira do triângulo com vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,2)$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;
- (c) $\vec{F}(x, y, z) = (2z + \sin(e^{x^3}), 4x, 5y + \sin(\sin z^2))\vec{k}$ e γ é a intersecção do plano $z = x + 4$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;
- (d) $\vec{F}(x, y, z) = (x + \cos(x^3), y, x^2 - y^2 + z^{100})$ e γ é a fronteira da parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;
- (e) $\vec{F}(x, y, z) = (y + z, 2x + (1 + y^2)^{20}, x + y + z)\vec{k}$ e γ é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $z = y$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;
- (f) $\vec{F}(x, y, z) = (y + \cos(\cos x), z + \sin(\cos y), x)$ e γ é a intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) com o plano $x + y + z = 0$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.
- (g) $\vec{F}(x, y, z) = (yz + \cos(\sin x), xz + \ln(1 + y^4), zy)$ e γ é a intersecção das superfícies $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 2x + 3$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;
- (h) $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{z^3}{1 + z^2} \right) + (\sin(\ln(1 + x^4)), e^{y^3}, z^2)$ e γ é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido horário;
- (i) $\vec{F}(x, y, z) = (2xz^3, x^2y^2, 3x^2z^2) + (y, 0, 0)$ e γ é a intersecção das superfícies $z = \sin y + 10$ e $x^2 + y^2 = 16$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;
- (j) $\vec{F}(x, y, z) = \left(x - y^2, x - z + \frac{y^2}{2 + \sin y}, y \right)$ e γ é a intersecção do parabolóide $4z = x^2 + y^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;
- (k) $\vec{F}(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y - z, y)$ e γ é o bordo da superfície obtida pela rotação em torno do eixo Oz do gráfico de $z = \frac{1}{y^2}$, $e \leq y \leq e^2$. Escolha uma orientação para γ .
- (l) $\vec{F}(x, y, z) = \left(\sin(\ln(1 + x^2)), \frac{-z}{y^2 + z^2} + e^{y^4}, \frac{y}{y^2 + z^2} + \cos z^{40} \right)$ sendo γ dado pela intersecção do cilindro $y^2 + z^2 = 4$ com o plano $x = y + z$. γ é percorrido uma vez no sentido anti-horário.
- (m) $\vec{F}(x, y, z) = (z + y^2, y^2 + 1, \ln(z^2 + 1) + y)$, sendo $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 10 - 2 \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

8. Calcule $\iint_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{N} dS$ sendo:

- (a) $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ e S a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 5$, orientada pelo campo de vetores normais que aponta para cima;

- (b) $\vec{F}(x, y, z) = (xz, x - y, x^2y)$ e S formada pelas 3 faces, que não estão no plano xy , do tetraedro formado pelos planos coordenados e o plano $3x + y + 3z = 6$, sendo \vec{N} o campo normal exterior ao tetraedro;
- (c) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, z, yz)$ e S a parte do hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ limitada por $x^2 + y^2 = 4$ com normal que aponta para o eixo z .

9. Seja γ uma curva simples, fechada e plana e seja $\vec{N} = (a, b, c)$ um vetor unitário normal ao plano que contém γ . Mostre que a área da região limitada por γ é dada por

$$\frac{1}{2} \int_{\gamma} (bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz,$$

com γ orientada pela orientação induzida de \vec{N} .

10. Seja $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$, onde \vec{N} é a normal unitária exterior a S nos seguintes casos:

- (a) S é a esfera de raio $R > 0$ com centro na origem;
- (b) S é uma superfície fechada lisa por partes tal que a origem não pertence a S nem à região interior a S ;
- (c) S é uma superfície fechada lisa por partes que contém a origem em seu interior.

11. Seja S uma superfície fechada lisa por partes orientada pela normal exterior \vec{N} e E a região interior a S em \mathbb{R}^3 . Verifique as seguintes igualdades:

- (a) Volume de $E = \frac{1}{3} \iint_S xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$.
- (b) $\iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{N} dS = 0$, para qualquer campo \vec{F} de classe C^2 no interior de S cujo domínio contenha S .

12. Em cada caso abaixo, determine se \vec{F} é ou não campo gradiente no domínio indicado. Em caso afirmativo, determine um potencial para \vec{F} .

- (a) $\vec{F}(x, y, z) = (2x^2 + 8xy^2, 3x^3y - 3xy, -4z^2y^2 - 2x^3z)$ em \mathbb{R}^3
- (b) $\vec{F}(x, y, z) = (x + z, -y - z, x - y)$ em \mathbb{R}^3
- (c) $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, 4 + 2y \sin x, 3xz^2 + 2)$ em \mathbb{R}^3
- (d) $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ em \mathbb{R}^3
- (e) $\vec{F}(x, y, z) = (xy, y^2, xyz)$ em \mathbb{R}^3
- (f) $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$ em $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0)\}$
- (g) $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$ em $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0)\}$

☆ Respostas

- (1) (a) $4\pi(2 - \sqrt{2})$, (b) 8π , (c) $16\pi\sqrt{14}$, (d) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$, (e) $8a^2$, (f) $2a^2(\pi - 2)$, (g) $4ab\pi^2$, (h) 4π .
- (2) (a) $2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} dx$, (b) $2\pi \int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2} dx$.
- (3) (a) $13\sqrt{2}/3$, (b) $4\pi/3$, (c) $3\sqrt{14}$, (d) $7\sqrt{6}/24$, (e) $\frac{\pi}{840}(12563\sqrt{17} - 2347)$, (f) $\pi\sqrt{2}/4$, (g) $\frac{-\pi}{4}(8 + \sqrt{2})$, (h) 16π , (i) 0, (j) $8\pi\sqrt{2}$, (k) $\pi\sqrt{2}$.
- (4) (a) 0, (b) $-3\pi/4$, (c) $-73\pi/6$, (d) 108π , (e) 128π , (f) $-\pi/2$, (g) 48, (h) -1, (i) 0, (j) $128/5$, (k) $32/3$, (l) $19\pi/4$, (m) 8, (n) $\frac{4}{5}\pi ab^3c$, (o) $\frac{194\pi}{5}$; (p) 0, (q) $-\frac{\pi}{3}$.
- (5) (a) $3\pi a^4/4$; (b) 4; (c) 28π ; (d) -54π ; (e) $-\frac{35\pi}{16}$; (f) $\frac{4\pi}{5}R^5$; (g) $\frac{176\pi}{3}$; (h) $-\frac{\pi}{2}(e+1)$; (i) $\pi(e+11/6)$; (j) 2π ;
- (7) (a) $7/2$, (b) $4/3$, (c) -4π , (d) -1, (e) π , (f) $-a^2\pi\sqrt{3}$, (g) -24π , (h) -2π , (i) -16π , (j) 4π , (k) 0, (l) 2π , (m) 4π ;
- (8) (a) 4π , (b) 6, (c) 0
- (10) (a) 4π , (b) 0, (c) 4π
- (12) (a) Não; (b) Sim, $f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + zx - zy$; (c) Sim, $f(x, y, z) = y^2 \sin x + xz^3 + 4y + 2z$; (d) Sim, $f(x, y, z) = xyz$; (e) Não; (f) Sim, $f(x, y, z) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$; (g) Sim, $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$