UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM042 - Cálculo III (Noturno)
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA PRIMEIRA PROVA - 19/11/2020

Questão 1 Calcule as integrais a seguir:

(a) **(1 ponto)** $\iint_D (3x-2y)\;dxdy$, onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ x \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$

Solução.

$$\begin{aligned}
\iint_D (3x-2y)\;dxdy &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (3r\cos\theta - 2r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta \\
&= 3\int_0^1 r^2dr\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta - 2\int_0^1 r^2dr\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\theta d\theta \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

∎

(b) **(1,5 ponto)** $\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2 (e^{y^3}+x)dydx$

Solução.

$$\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2 (e^{y^3}+x)dydx = \int_0^2\int_0^{y^2}(e^{y^3}+x)dxdy = \int_0^2 (y^2e^{y^3}+y^4/2)dx = \frac{5e^8+43}{15}.$$

∎

(c) **(1,5 ponto)** $\iint_D \left(y^2\operatorname{sen}(5xy-x)+6(y^3+x^2y)+2y^2\right)\;dxdy$, onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 1\}$

Solução. Por imparidade do integrando em x e simetria da região de integração em relação ao eixo y, tem-se $\iint_D y^2\operatorname{sen}(5xy-x)dxdy = 0$. Por imparidade do integrando em y e simetria da região de integração em relação ao eixo x, tem-se $\iint_D 6(y^3+x^2y)dxdy = 0$, portanto

$$\begin{aligned}
\iint_D \left(y^2\operatorname{sen}(5xy-x)+6(y^3+x^2y)+2y^2\right)\;dxdy &= 2\iint_D y^2dxdy \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\operatorname{sen}\theta)^2\,r\,dr\,d\theta \\
&= 2\int_0^1 r^3dr\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\theta d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

∎

Questão 2 Volumes de sólidos (cada item vale **(2 pontos)**):

(a) Determine o volume do sólido E delimitado pelo parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = -2$

Solução. O volume é dado pela integral tripla abaixo, onde D é o disco de centro na origem e raio 2:

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\int_{-2}^{2-x^2-y^2} dz \right) dxdy &= \iint_D (4 - x^2 - y^2) dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta \\ &= 8\pi . \end{aligned}$$

∎

(b) Determine o volume do sólido E interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e interior ao cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solução. *Traduzindo* a equação do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ para coordenadas esféricas obtemos $\phi = \dfrac{\pi}{4}$ portanto, a região E pode ser descrita da seguinte forma: $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le \phi \le \dfrac{\pi}{4}$. Portanto, o volume procurado é igual a

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^2 r^2 \mathrm{sen}\phi dr d\phi d\theta = 2\pi \int_0^{\pi/4} \mathrm{sen}\phi d\phi \int_0^2 r^2 dr = \frac{8\pi}{3}(2 - \sqrt{2}) .$$

∎

Questão 3 **(2 pontos)** Calcule

$$\iiint_E \mathrm{sen}\left[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\right] \, dxdydz ,$$

onde E é o sólido contido no primeiro octante, delimitado pela esfera de centro na origem e raio 1 e pelos planos coordenados.

Solução.

$$\iiint_E \mathrm{sen}\left[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\right] \, dxdydz = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \mathrm{sen}(r^3) r^2 \mathrm{sen}\phi dr d\phi d\theta = \frac{\pi}{6}(1 - \cos 1) .$$

∎