

GABARITO DA PRIMEIRA PROVA - 19/11/2020

Questão 1 Calcule as integrais a seguir:

(a) (1 ponto) $\iint_D (x+y) \, dx \, dy$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

Solução.

$$\iint_D (x+y) \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r \cos \theta + r \sin \theta) r \, dr \, d\theta = \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta + \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta = \frac{2}{3}.$$

■

(b) (1,5 ponto) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 (e^{x^3} + y) \, dx \, dy$

Solução.

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 (e^{x^3} + y) \, dx \, dy = \int_0^2 \int_0^{x^2} (e^{x^3} + y) \, dy \, dx = \int_0^2 (x^2 e^{x^3} + x^4/2) \, dx = \frac{5e^8 + 43}{15}.$$

■

(c) (1,5 ponto) $\iint_D (x^2 \sin(ye^x - y^5) + 16(x^3 + xy^3) + 2x^2) \, dx \, dy$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Solução. Por imparidade do integrando em y e simetria da região de integração em relação ao eixo x , tem-se $\iint_D x^2 \sin(ye^x - y^5) \, dx \, dy = 0$. Por imparidade do integrando em x e simetria da região de integração em relação ao eixo y , tem-se $\iint_D 16(x^3 + xy^3) \, dx \, dy = 0$, portanto

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 \sin(ye^x - y^5) + 16(x^3 + xy^3) + 2x^2) \, dx \, dy &= 2 \iint_D x^2 \, dx \, dy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \cos \theta)^2 r \, dr \, d\theta \\ &= 2 \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

■

Questão 2 Volumes de sólidos (cada item vale (2 pontos)):

(a) Determine o volume do sólido E delimitado pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = -3$

Solução. O volume é dado pela integral tripla abaixo, onde D é o disco de centro na origem e raio 2:

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\int_{-3}^{1-x^2-y^2} dz \right) dx dy &= \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

■

(b) Determine o volume do sólido E interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e interior ao cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solução. Traduzindo a equação do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ para coordenadas esféricas obtemos $\phi = \frac{\pi}{4}$ portanto, a região E pode ser descrita da seguinte forma: $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$. Portanto, o volume procurado é igual a

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta = 2\pi \int_0^{\pi/4} \sin\phi d\phi \int_0^1 r^2 dr = \frac{\pi}{3} (2 - \sqrt{2}).$$

■

Questão 3 (2 pontos) Calcule

$$\iiint_E \cos[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}] dx dy dz,$$

onde E é o sólido contido no primeiro octante, delimitado pela esfera de centro na origem e raio 1 e pelos planos coordenados.

Solução.

$$\iiint_E \cos[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}] dx dy dz = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \cos(r^3) r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta = \frac{\pi \operatorname{sen} 1}{6}.$$

■