UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM042 - Cálculo III (Noturno)
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA PRIMEIRA PROVA - 03/12/2020

Questão 1 Calcule as integrais a seguir:

(a) **(20 pontos)** $\int_\gamma (x-y)^2 ds$, onde γ é o arco da circunferência $x^2+y^2=1$, $x \geq 0$

Solução. Parametrizando γ como $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$, temos que $|\gamma'(t)| = 1$ e

$$\int_\gamma (x-y)^2 ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t - \operatorname{sen} t)^2 dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - 2\operatorname{sen} t \cos t) dt = \pi + \left[\frac{\cos(2t)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi\,.$$

∎

(b) **(20 pontos)** $\int_\gamma (x+2y)dx + y^2 dy$, onde γ é o arco de parábola $y = x^2$ percorrido de $(0,0)$ a $(1,1)$

Solução. Escrevendo $\gamma(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$, temos

$$\int_\gamma (x+2y)dx + y^2 dy = \int_0^1 [(t+2t^2) + t^4(2t)]dt = \int_0^1 (t + 2t^2 + 2t^5)dt = \frac{3}{2}\,.$$

∎

Questão 2 Calcule as integrais de linha abaixo (cada item vale **(20 pontos)**):

(a)

$$\int_\gamma \left(\ln(7+x^{2020}) - xy^3\right) dx + \left(e^{y^2 \operatorname{sen} y} + x\right) dy\,,$$

onde γ é a circuferência $x^2+y^2=4$ orientada no sentido anti-horário

Solução. Pelo Teorema de Green,

$$\int_\gamma \left(\ln(7+x^{2020}) - xy^3\right) dx + \left(e^{y^2 \operatorname{sen} y} + x\right) dy = \iint_D (1+3xy^2) dxdy = 4\pi\,,$$

onde usamos o fato que a expressão xy^2 é ímpar em x e a região D é simétrica em relação ao eixo x, para concluir que $\iint_D xy^2 dxdy = 0$. ∎

(b)

$$\int_\gamma \left(x^3 - xe^{xy}\right) dx + \left(3x^2 y - ye^{xy}\right) dy\,,$$

onde $\gamma(t) = (2\cos(\pi t), 1-t^2)$, $0 \leq t \leq 1$

Solução. O campo de vetores $\vec{F}(x,y) = (x^3 - xe^{xy}, 3x^2y - ye^{xy})$ é conservativo em $\mathbb{R}^2$ e admite $f(x,y) = x^3y - e^{xy}$ como potencial, portanto, como $\gamma(0) = (2,1)$ e $\gamma(1) = (-2,0)$, temos

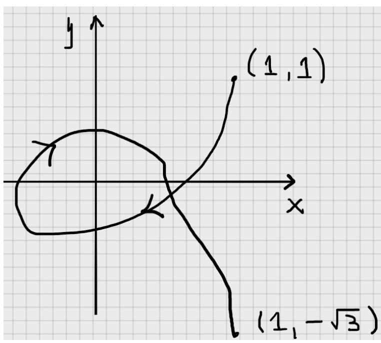
$$\int_\gamma \left(y^3 - ye^{xy}\right) dx + \left(3xy^2 - xe^{xy}\right) dy = f(-2,0) - f(2,1) = e^2 - 9.$$

∎

(c)

$$\int_\gamma \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2},$$

onde γ é a curva esboçada abaixo, percorrida de $(1,\sqrt{3})$ a $(1,-\sqrt{3})$



Solução. Podemos escrever a integral acima como

$$\underbrace{\int_\gamma \frac{xdx + ydy}{x^2+y^2}}_{I_1} + \underbrace{\int_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}}_{I_2} = I_1 + I_2.$$

O campo de vetores $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ que aparece em I_1 é conservativo em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, admitindo como potencial a função $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, portanto, $I_1 = f(1,-\sqrt{3}) - f(1,1) = \dfrac{1}{2}\ln 2$. Para I_2, observamos que, conforme discutido em aula,

$$I_2 = -2\pi + \text{Variação de ângulo entre } (1,1) \text{ e } (1,-\sqrt{3}) = -2\pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = -2\pi - \frac{7\pi}{12} = -\frac{31\pi}{12}.$$

Portanto, $I_1 + I_2 = \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{31\pi}{12}$. ∎