

GABARITO DA PRIMEIRA PROVA - 03/12/2020

Questão 1 Calcule as integrais a seguir:

- (a) (20 pontos)  $\int_{\gamma} (x+y)^2 ds$ , onde  $\gamma$  é o arco da circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y \geq 0$

**Solução.** Parametrizando  $\gamma$  como  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , temos que  $|\gamma'(t)| = 1$  e

$$\int_{\gamma} (x+y)^2 ds = \int_0^{\pi} (\cos t + \sin t)^2 dt = \int_0^{\pi} (1 + 2\sin t \cos t) dt = \pi + \left[ -\frac{\cos(2t)}{2} \right]_0^{\pi} = \pi.$$

- (b) (20 pontos)  $\int_{\gamma} (x+y)dx + y^2 dy$ , onde  $\gamma$  é o arco de parábola  $x = y^2$  percorrido de  $(0,0)$  a  $(1,1)$

**Solução.** Escrevendo  $\gamma(t) = (t^2, t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , temos

$$\int_{\gamma} (x+y)dx + y^2 dy = \int_0^1 [(t^2 + t)(2t) + t^2] dt = \int_0^1 (2t^3 + 3t^2) dt = \frac{3}{2}.$$

Questão 2 Calcule as integrais de linha abaixo (cada item vale (20 pontos)):

(a)

$$\int_{\gamma} (e^{x^2 \sin x} - xy^3) dx + (\ln(7 + y^{2020}) + x) dy,$$

onde  $\gamma$  é a circunferência  $x^2 + y^2 = 4$  orientada no sentido anti-horário

**Solução.** Pelo Teorema de Green,

$$\int_{\gamma} (e^{x^2 \sin x} - xy^3) dx + (\ln(7 + y^{2020}) + x) dy = \iint_D (1 + 3xy^2) dx dy = 4\pi,$$

onde usamos o fato que a expressão  $xy^2$  é ímpar em  $x$  e a região  $D$  é simétrica em relação ao eixo  $x$ , para concluir que  $\iint_D xy^2 dx dy = 0$ .

(b)

$$\int_{\gamma} (y^3 - ye^{xy}) dx + (3xy^2 - xe^{xy}) dy,$$

onde  $\gamma(t) = (1 + t^2, 2 \cos(\pi t))$ ,  $0 \leq t \leq 1$

**Solução.** O campo de vetores  $\vec{F}(x, y) = (y^3 - ye^{xy}, 3xy^2 - xe^{xy})$  é conservativo em  $\mathbb{R}^2$  e admite  $f(x, y) = xy^3 - e^{xy}$  como potencial, portanto, como  $\gamma(0) = (1, 2)$  e  $\gamma(1) = (2, -2)$ , temos

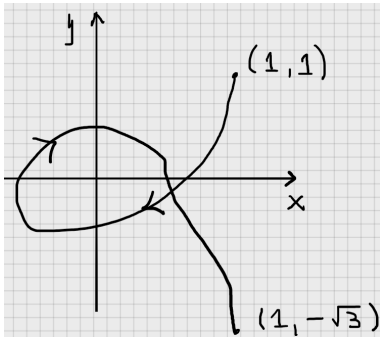
$$\int_{\gamma} (y^3 - ye^{xy}) dx + (3xy^2 - xe^{xy}) dy = f(2, -2) - f(1, 2) = e^2 - e^{-4} - 24.$$

■

(c)

$$\int_{\gamma} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2},$$

onde  $\gamma$  é a curva esboçada abaixo, percorrida de  $(1, \sqrt{3})$  a  $(1, -\sqrt{3})$



**Solução.** Podemos escrever a integral acima como

$$\underbrace{\int_{\gamma} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}}_{I_1} + \underbrace{\int_{\gamma} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}}_{I_2} = I_1 + I_2.$$

O campo de vetores  $\vec{F}(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$  que aparece em  $I_1$  é conservativo em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , admitindo como potencial a função  $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ , portanto,  $I_1 = f(1, -\sqrt{3}) - f(1, 1) = \frac{1}{2} \ln 2$ . Para  $I_2$ , observamos que, conforme discutido em aula,

$$I_2 = -2\pi + \text{Variação de ângulo entre } (1, 1) \text{ e } (1, -\sqrt{3}) = -2\pi - \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = -2\pi - \frac{7\pi}{12} = -\frac{31\pi}{12}.$$

Portanto,  $I_1 + I_2 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{31\pi}{12}$ .

■