UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM042 - Cálculo III
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA TERCEIRA PROVA - 17/12/2020

Questão 1 Calcule as integrais de superfície a seguir (cada item vale **(20 pontos)**):

(a) $\iint_S x dS$, onde S é a porção da esfera $x^2+y^2+z^2=1$ tal que $x \geq 0$

Solução. Usando coordenadas esféricas, temos $x = \cos\phi \operatorname{sen}\theta$ e $dS = \operatorname{sen}\phi d\phi d\theta$, portanto,

$$\iint_S x dS = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\pi} (\operatorname{sen}\phi\cos\theta)\operatorname{sen}\phi d\phi d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta \int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2\phi d\phi = \pi$$

∎

(b) $\iint_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}dS$, onde S é a porção do parabolóide $z = x^2+y^2$ abaixo do plano $z=1$

Solução. Podemos parametrizar S usando $\Phi(u,v) = (u,v,u^2+v^2)$, $(u,v)\in D$, onde D é o disco unitário centrado na origem. Para esta parametrização, temos $\vec{n}(u,v) = (-2u,-2v,1)$, logo, $|\vec{n}| = \sqrt{1+4u^2+4v^2}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\iint_S (x^2+y^2)dS &= \iint_D \sqrt{1+4u^2+4v^2}\sqrt{1+4u^2+4v^2}dudv \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+4r^2)rdrd\theta \\
&= 2\pi\int_0^1 (r+4r^3)dr \\
&= 3\pi.
\end{aligned}$$

∎

Questão 2 Calcule o fluxo do campo de vetores $\vec{F}$ através da superfície orientada S nos seguintes casos (cada item vale **(25 pontos)**):

(a) $\vec{F}(x,y,z) = (z^3+\operatorname{sen}(yz), y^{2020} - 7\cos(x^2+z^3), e^{x^2}+z^3)$ e S é a esfera unitária $x^2+y^2+z^2=1$ orientada pela normal exterior

Solução. Como se trata de uma superfície fechada, denotando por E a região interior a S, podemos aplicar o Teorema da Divergência para concluir que

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS &= \iiint_E \mathrm{div}\vec{F}dxdydz \\
&= \iiint_E (2020y^{2019}+3z^2)dxdydz \\
&= 2020 \underbrace{\iiint_E y^{2019}dxdydz}_{=0 \text{ por simetria e imparidade}} +3\iiint_E z^2 dxdydz \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 (r\cos\phi)^2 r^2 \mathrm{sen}\phi dr d\phi d\theta \\
&= 3\cdot 2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5} \\
&= \frac{4\pi}{5}.
\end{aligned}$$

∎

(b) $\vec{F}(x,y,z) = (4z^5, yz-\mathrm{sen}(xz), z^2)$ e S é a porção do parabolóide $z = 1-x^2-y^2$ que está acima do plano $z=0$ orientada de forma que $\vec{N}\cdot\vec{k}>0$

Solução. Sejam S_1 o disco unitário contido no plano xy, orientado de forma que $\vec{N} = -\vec{k}$ e E o sólido delimitado por S e S_1. Pelo Teorema da Divergência, temos que $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS + \iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{N}dS = \iiint_E \mathrm{div}\vec{F}dxdydz.$

Como $\vec{F}$ é nulo em S_1, segue que $\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{N}dS = 0$. Como $\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) = 3z$, denotando por D o disco unitário centrado na origem, temos que

$$\begin{aligned}
\iiint_E \mathrm{div}\vec{F}dxdydz &= \iint_D\left(\int_{x^2+y^2}^1 3zdz\right)dxdy \\
&= \frac{3}{2}\iint_D (1-(x^2+y^2)^2)dxdy \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^4)rdrd\theta \\
&= 3\pi\int_0^1 (r-r^5)dr \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Portanto, $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS = \pi$. ∎

Questão 3 **(10 pontos)** Use o Teorema de Stokes para calcular

$$\int_\gamma \vec{F}d\gamma,$$

onde $\vec{F}(x,y,z) = (x^2z+e^{x^2-1}, xy^2, \cos(z^2-3))$ e γ é a curva de intersecção do plano $x+y+z=1$ com o cilindro $x^2+y^2=1$, orientada de forma que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.

Solução. Consideremos S a porção do plano $x+y+z=1$ interior ao cilindro $x^2+y^2=1$, orientada de forma $\vec{N}\cdot\vec{k}>0$. Vemos que γ é exatamente a fronteira de S e a orientação de γ é coerente com a orientação de S. Podemos parametrizar S pela aplicação $\Phi(u,v)=(u,v,1-u-v)$, $(u,v)\in D: u^2+v^2\leq 1$, e $\vec{n}=(1,1,1)$. Além disso, $\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z)=(0,x^2,y^2)$. Portanto, pelo Teorema de Stokes,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}d\gamma &= \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{N}dS \\
&= \iint_D (u^2+v^2)dudv \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cdot r dr d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

∎