UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM042 - Cálculo III
Prof. José Carlos Eidam

Sobre o Teorema de Green

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $\vec{F} = \vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ um campo de vetores de classe C^1 em D. Se $\gamma : [a,b] \to D$ é uma curva fechada orientada positivamente (i.e., no sentido anti-horário), definimos a *circulação de* $\vec{F}$ ao longo de γ como a integral $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma$.

Vamos analisar o que ocorre com a circulação de um campo por unidade de área. Para isso, fixado um ponto em D (que pode ser a origem, sem perda de generalidade) e dado um número real $a > 0$, considere γ_a a curva formada pela fronteira do quadrado $[-a,a] \times [-a,a]$ orientada no sentido anti-horário. Vamos analisar a circulação de $\vec{F}$ ao longo de γ_a:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_a} \vec{F} \cdot \gamma_a &= \int_{-a}^{a} (Q(a,t) - Q(-a,t))\,dt - \int_{-a}^{a} (P(t,a) - P(t,-a))\,dt \\ &= \int_{-a}^{a} (2a)(Q_x(a_1(t),t) - P_y(t,a_2(t)))\,dt,\end{aligned}$$

pelo teorema do valor médio, onde $-a \le a_1(t), a_2(t) \le a$. Portanto, dividindo pela área do quadrado, temos que

$$\frac{1}{4a^2}\int_{\gamma_a} \vec{F} \cdot \gamma_a = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} (Q_x(a_1(t),t) - P_y(t,a_2(t)))\,dt \xrightarrow{a \to 0} Q_x(0,0) - P_y(0,0),$$

pela continuidade de Q_x e P_y. Isso significa que a quantidade

$$Q_x(x,y) - P_y(x,y)$$

representa a *circulação instantânea de* $\vec{F}$ *no ponto* (x,y) *por unidade de área.*

Uma forma natural de interpretarmos o teorema de Green é a seguinte: se γ é uma curva fechada qualquer em D orientada no sentido positivo e R é a região limitada por γ, então a circulação de $\vec{F}$ ao longo de γ é a *soma das circulações nos pontos de* R, i.e.,

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int\int_R \left(Q_x - P_y\right) dx\,dy.$$

De forma semelhante, podemos tratar o *fluxo* de um campo através da fronteira de uma região. Seja $\gamma : [a,b] \to D$ uma curva regular fechada positivamente orientada cujo traço delimita uma região aberta R. O campo normal exterior unitário à γ é um campo ao longo de γ definido como $\vec{N} = (y'(t), -x'(t))/|\gamma'(t)|$. O fluxo do campo $\vec{F}$ através de γ é definido como $\displaystyle\oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{N}\,ds$. Portanto,

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{N}\,ds = \int_a^b (P,Q) \cdot \frac{(y', -x')}{|\gamma'|}|\gamma'|\,dt = \oint_\gamma -Q\,dx + P\,dy = \int\int_R \left(P_x + Q_y\right) dx\,dy,$$

pelo Teorema de Green. A igualdade acima é chamada de *Teorema da Divergência* ou *Teorema de Gauss*. A expressão $P_x + Q_y$ é chamada de *divergência* do campo $\vec{F}$ e, com cálculos análogos àqueles apresentados anteriormente, podemos interpretar a divergência de um campo como o *fluxo instantâneo* em um ponto por unidade de área (fluxo através de um cubo *infinitesimal* centrado no ponto). O teorema da divergência pode ser naturalmente interpretado da mesma forma que o Teorema de Green.