UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM212 - Análise II
Prof. José Carlos Eidam

PRIMEIRA PROVA

INFORMAÇÕES IMPORTANTES

1. O prazo para entrega desta avaliação é **24/11/2020 (terça-feira), às 8h**. Não serão aceitas, em hipótese nenhuma, avaliações entregues fora deste prazo.
2. A avaliação deve ser entregue exclusivamente através da plataforma Google Sala de Aula. A entrega pode ser via manuscrito scaneado/fotografado ou digitado.
3. Em caso de dúvida na correção, você poderá ser contactado.
4. A prova vale 100 (cem) pontos.
5. Justifique todas as suas respostas.
6. Boa prova!

1. Determine se as integrais abaixo são convergentes (cada item vale **5 pontos**):

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1-x^3}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}\cos(x^2-1)}{\sqrt[3]{x^4+x^2+7}}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{1+x^3}\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^1 |\ln x|^\alpha\,dx,\ \alpha>0$

   (e) $\displaystyle\int_0^\infty \arctan(x^{-\alpha})\,dx,\ \alpha>0$ fixado

   (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx$

2. Mostre que as integrais abaixo convergem uniformemente em cada intervalo indicado (cada item vale **5 pontos**):

   (a) $\displaystyle F(t)=\int_0^\infty \frac{e^{-tx}\,\mathrm{sen}\,x}{x^\alpha}\,dx,\ t>0\ (0<\alpha\le 1$ fixado)

   (b) $\displaystyle F(t)=\int_0^\infty \frac{x\cos^3 x}{t^2+x^2}\,dx,\ 0\le t\le a$, onde $a>0$ é fixado

(c) $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x + \cos(tx^4 - 3)}{e^{x^2} + e^t} dx, \ t \in \mathbb{R}$

(d) $F(t) = \int_0^{\infty} \frac{x^2 \arctan(tx^3 - 2t^2 x + 2e^t)}{x^4 + 2x^2 + 1} dx, \ t \in \mathbb{R}$

3. Determine F' para as seguintes integrais a um parâmetro, justificando seus cálculos (cada item vale **5 pontos**):

   (a) $F(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \operatorname{sen}(x^{\alpha}) dx, \ t > 0$

   (b) $F(t) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + t^2}, \ t > 0$

4. **(20 pontos)** Seja $F(t) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x \cos(tx)}{x} dx, \ t \geq 0$. Nos itens abaixo, lembre que $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, conforme demonstramos em aula.

   (a) Use fórmulas trigonométricas elementares para mostrar que

$$F(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ \frac{\pi}{4} & \text{se } t = 1 \\ 0 & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

   (b) Calcule $\int_0^a F(t) dt$ e use os resultados já provados nas aulas para concluir que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen} x}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{a\pi}{2} & \text{se } 0 \leq a \leq 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

5. **(20 pontos)** Seja $F(t) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-tx^2}}{x^2} dx, \ t \geq 0$.

   (a) Mostre que $F'(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}, \ t > 0$.

   (b) Conclua que $\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-tx^2}}{x^2} dx = \sqrt{\pi t}$, para todo $t \geq 0$.

   (c) Use uma argumentação semelhante para concluir que $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{x^2} dx = \frac{\pi t}{2}, \ t \geq 0$.