UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM212 - Análise II
Prof. José Carlos Eidam

SEGUNDA PROVA

INFORMAÇÕES IMPORTANTES

1. O prazo para entrega desta avaliação é **08/12/2020 (terça-feira), às 8h**. Não serão aceitas, em hipótese nenhuma, avaliações entregues fora deste prazo.
2. A avaliação deve ser entregue exclusivamente através da plataforma Google Sala de Aula. A entrega pode ser via manuscrito scaneado/fotografado ou digitado.
3. Em caso de dúvida na correção, você poderá ser contactado.
4. A prova vale 100 (cem) pontos.
5. Justifique todas as suas respostas.
6. Boa prova!

1. Mostre que as sequências de funções abaixo convergem uniformemente nos domínios D indicados ($\alpha > 0$ fixado) e determine a função limite em cada caso (cada item vale **5 pontos**):

   (a) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{nx^2 + 2020}$, $D = \mathbb{R}$

   (b) $f_n(x) = \dfrac{xe^{-x/n}}{n}$, $D = [0, \alpha]$

   (c) $f_n(x) = n\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{n}\right) + \dfrac{nx^2}{1 + n^2x^2}$, $D = [-\alpha, \alpha]$

   (d) $f_n(x) = n\ln\left(1 + \dfrac{1}{nx}\right)$, $D = [\alpha, \infty)$

   (e) $f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$, $D = [1, 1 + \alpha]$ (Dica: Use o Teorema do Valor Médio nos itens (d) e (e))

2. Mostre que as sequências de funções abaixo convergem uniformemente nos domínios D indicados (cada item vale **10 pontos**):

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{sen} 2n)x^2}{n^\alpha(1 + nx^2)}$, $D = \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ fixado

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(x + n)}$, $D = (0, \infty)$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n x}{1 + \sqrt{n}}$, $D = [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, para $\varepsilon > 0$ fixado

3. Considere a função ζ de Riemann, definida para $x > 1$, por

$$\zeta(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

   (a) **(5 pontos)** Mostre que a série acima converge uniformemente em qualquer intervalo do tipo $[\alpha, \infty)$, para qualquer $\alpha > 1$.

   (b) **(10 pontos)** Mostre que ζ é uma função de classe C^∞ e sua derivada de ordem k é dada pela expressão

$$\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

   (c) **(10 pontos)** Mais geralmente, dada uma sequência numérica $\{a_n\}_{n\geq 1}$, a *Série de Dirichlet* correspondente é a função

$$f(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}.$$

   A função ζ, por exemplo, corresponde à sequência constante igual a 1. Mostre que se $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge então a série de Dirichlet correspondente converge uniformemente em $[0, \infty)$. Além disso, mostre que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

4. Considere a sequência de funções $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$, $x \in [0,1]$. Conforme já vimos, f_n converge pontualmente para zero em $[0,1]$.

   (a) **(10 pontos)** Mostre que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência equicontínua e converge uniformemente em qualquer intervalo da forma $[\alpha, 1]$, para $\alpha \in (0,1)$ fixado.

   (b) **(10 pontos)** Mostre que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *não* é equicontínua em $x = 0$ e *não* converge uniformemente em $[0,1]$.