UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM212 - Análise II
Prof. José Carlos Eidam

TERCEIRA PROVA

INFORMAÇÕES IMPORTANTES

1. O prazo para entrega desta avaliação é **21/12/2020 (segunda-feira), às 8h**. Não serão aceitas, em hipótese nenhuma, avaliações entregues fora deste prazo.
2. A avaliação deve ser entregue exclusivamente através da plataforma Google Sala de Aula. A entrega pode ser via manuscrito scaneado/fotografado ou digitado.
3. Em caso de dúvida na correção, você poderá ser contactado.
4. A prova vale 100 (cem) pontos.
5. Justifique todas as suas respostas.
6. Boa prova!

1. Determine o intervalo de convergência das séries de potências abaixo (cada item vale **8 pontos**):

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2020^n}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}$, $b > a > 0$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{5n+7}\right)^n x^n$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{n!}$

2. Use derivação e integração termo a termo para justificar as seguintes identidades (cada item vale **10 pontos**):

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$, $|x| < 1$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$, $|x| < 1$

(d) (Bônus) Você consegue intuir uma fórmula para $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n$?

3. **(10 pontos)** Seja $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências tal que seus coeficientes sejam relacionados por uma equação do tipo $a_n + Aa_{n-1} + Ba_{n-2} = 0$, com $A, B \in \mathbb{R}$, para $n \geq 2$. Mostre que para qualquer x no intervalo de convergência, tem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0 + (a_1 + Aa_0)x}{1 + Ax + Bx^2}.$$

4. Nesta questão, vamos provar as identidades abaixo *(Sophomore Dreams)*:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \quad \text{e} \quad \int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}.$$

A expressão *(Sophomore Dreams)* seria o equivalente a algo como *sonhos de um calouro*, ou seja, algo que provavelmente estaria errado (tipo $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$)... Mas neste caso, vamos ver que, surpreendentemente, está certo!

Para esta questão, você pode usar o fato que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ com convergência uniforme em qualquer conjunto limitado de $\mathbb{R}$. (Se quiser, pode provar, mas pode usar sem provar)

(a) **(5 pontos)** Mostre que $x^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(\ln x)^n}{n!}$ para todo $x \in [0,1]$, com convergência uniforme.

(b) **(10 pontos)** Comute a integral com a soma infinita (e justifique) para mostrar que

$$\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n (\ln x)^n\,dx.$$

Tome cuidado em $x = 0$...

(c) **(5 pontos)** Faça $u = (n+1)\ln x$ em cada integral do item anterior para mostrar que $x^x dx = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$. Use uma argumentação parecida para provar a outra identidade do enunciado.