SEQUÊNCIAS DE FUNÇÕES & DERIVAÇÃO

$\{f_n\}_{n\geq 1}$, $f_n \longrightarrow f$ $\cancel{\Longrightarrow}$ $f_n' \longrightarrow f'$

POR EXEMPLO,

$f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, CONVERGE UNIFORMEMENTE PARA ZERO $\left(\left| \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n} \right| \leq \dfrac{1}{n} \right)$

$f_n'(x) = \cos nx$ NÃO CONVERGE EM NENHUM $x \neq 0$!

FATO SE $f_n \to f$ PONTUALMENTE EM $[a,b]$

E $f_n' \xrightarrow{u} g$ ENTÃO $g = f'$.

PROVA $t, t_0 \in [a,b]$

$$\longrightarrow f_n(t) = f_n(t_0) + \int_{t_0}^{t} f_n'(s)\,ds \quad (*)$$

$n \to \infty$

$$\longrightarrow f(t) = f(t_0) \qquad ?$$

$n \to \infty$

$(*)$ $h_n \xrightarrow{u} h$ EM $[a,b]$

$$\Longrightarrow \int_{t_0}^{t} h_n(t)\,dt \longrightarrow \int_{t_0}^{t} h(t)\,dt$$

$$\left| \int_{t_0}^{t} h_n(t)\,dt - \int_{t_0}^{t} h(t)\,dt \right| \le \left| \int_{t_0}^{t} |h_n(t) - h(t)|\,dt \right|$$

$$\le \sup_{a \le t \le b} |h_n(t) - h(t)| \cdot \left| \int_{t_0}^{t} dt \right|$$

$$= \sup_{a \le t \le b} |h_n(t) - h(t)| \cdot |t - t_0|$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\therefore \quad f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds \Longrightarrow f' = g$$

COROLÁRIO $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE UNIF. EM $[a,b]$

$$\Longrightarrow \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

EXEMPLO

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

UNIFORMEMENTE EM $[-a,a]$, $0<a<1$

$\therefore$ DADO $y \in (-1,1)$

$$\ln(1+y) = \int_0^y \frac{dx}{1+x} = \int_0^y \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right\} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^y x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} y^{n+1}$$

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} y^n \quad , -1 < y < 1$$

TEMOS TAMBÉM QUE

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

UNIFORMEMENTE EM $[-a,a]$, $a \in (0,1)$

$$2(1-x)^{-3} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n x^{n-1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) x^m$$

E ASSIM POR DIANTE.