UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM212 - Análise II
Prof. Zeca Eidam

1 Integrais impróprias

A teoria de integração de Riemann clássica é feita com base em duas hipóteses marcantes:

① As funções são *limitadas*;

② Os intervalos de integração são *limitados*.

O termo *integral imprópria* denota uma extensão do conceito padrão de integral de Riemann para situações em que uma ou ambas hipóteses acima não são satisfeitas.

1.1 Primeiras ideias

Para iniciar a discussão, seja $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ uma função tal que sua restrição a qualquer intervalo $[a,b]$, $b>a$, seja integrável no sentido usual (e limitada). Assim, é natural nos perguntarmos se o limite

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

existe.

Definição 1 Dada f como acima, dizemos que f é integrável em $[a,\infty)$ (ou que *a integral* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *converge*) se o limite (1) existe e é finito. Neste caso, definimos

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \doteq \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Outra situação bastante comum ocorre quando temos uma função $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ tal que sua restrição a qualquer intervalo $[a,c]$, $a<c<b$, é integrável no sentido usual (e limitada). Como antes, é natural nos perguntarmos se o limite

$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx \tag{2}$$

existe.[1]

Definição 2 Dizemos que uma tal f é integrável em $[a,b)$ (ou que *a integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge*) se o limite (2) existe e é finito. Neste caso, definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx.$$

[1] É possível, por exemplo, termos nesta situação que $\lim_{c\to b^-} f(x)=\pm\infty$.

Alguns textos usam a notação $\int_a^{b^-} f(x)dx$ para sinalizar a *impropriedade* da integral em b. De forma análoga ao que fizemos acima, é possível definirmos integrais impróprias do tipo $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ e $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$. Deixamos este trabalho a cargo do leitor.

Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cuja restrição a qualquer intervalo limitado seja integrável (e limitada), dizemos que f é *integrável em* $\mathbb{R}$ se for integrável em $(-\infty,0]$ e em $[0,\infty)$ definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \doteq \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx.$$

Ao longo do texto, diremos que uma função está no *contexto de integração imprópria* quando satisfizer em seu contexto as hipóteses citadas acima. Por exemplo, $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ está no contexto de integração imprópria se satisfaz as hipóteses descritas antes da definição (1) e assim por diante.

Antes de prosseguirmos, vamos estudar alguns exemplos simples de convergência de integrais.

Exemplo 3 Dado $t>0$, temos que

$$\int_0^{\infty} e^{-tx}dx = \frac{1}{t}.$$

De fato, temos que

$$\int_0^{b} e^{-tx}dx = \left[-\frac{1}{t}e^{-tx}\right]_0^b = \frac{1-e^{-tb}}{t} \overset{b\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{t}.$$

Exemplo 4 Dado $\alpha>0$, vamos analisar a convergência da integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}. \tag{3}$$

Se $\alpha\neq 1$, temos

$$\int_1^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^b = \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$$

Quando $b\to\infty$, a expressão acima tem limite $\frac{1}{\alpha-1}$ se $\alpha>1$ e tem limite infinito se $0<\alpha<1$. No caso $\alpha=1$, temos

$$\int_1^{b} \frac{dx}{x} = \ln b \overset{b\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Portanto, a integral (3) diverge se $0<\alpha\leq 1$ e converge para $\frac{1}{\alpha-1}$ se $\alpha>1$.

Exemplo 5 Dado $\alpha>0$, vamos analisar a convergência da integral

$$\int_0^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}}. \tag{4}$$

Se $\alpha=1$ então $\int_b^{1} \frac{dx}{x} = -\ln b \overset{b\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Caso $\alpha\neq 1$, temos que

$$\int_b^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_b^1 = \frac{1-b^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Quando $b \to 0^+$, a expressão acima tem limite $\dfrac{1}{1-\alpha}$ se $0 < \alpha < 1$ e tem limite infinito se $\alpha > 1$. Logo, (4) converge para $\dfrac{1}{1-\alpha}$ se $0 < \alpha < 1$ e diverge se $\alpha > 1$.

Exemplo 6 Vamos provar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \lim_{b\to\infty} [\arctan x]_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

De forma análoga, vemos que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \pi/2$, logo, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi/2 + \pi/2 = \pi$.

Exemplo 7 Dado $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-tx} dx = \frac{n!}{t^{n+1}}. \tag{5}$$

De fato, dados $b > 0$ e $n \geq 1$, integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^b x^n e^{-tx} dx &= \left[\frac{-x^n e^{-tx}}{t}\right]_0^b + \frac{n}{t}\int_0^b x^{n-1} e^{-tx} dx \\
&= -\frac{b^n e^{-tb}}{t} + \frac{n}{t}\int_0^b x^{n-1} e^{-tx} dx \\
&\overset{b\to\infty}{\longrightarrow} \frac{n}{t}\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-tx} dx,
\end{aligned}$$

logo, $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-tx} dx = \frac{n}{t}\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-tx} dx$. Procedendo indutivamente e usando o exemplo (3), temos que

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-tx} dx = \frac{n}{t}\cdot\frac{n-1}{t}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{t}\int_0^{\infty} e^{-tx} dx = \frac{n!}{t^{n+1}}.$$

Na proposição abaixo, resumimos algumas propriedades aritméticas simples para integrais impróprias.

Proposição 8 Dadas funções $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, ambas no contexto de integração imprópria, são verdadeiras as afirmações abaixo:

1. Se $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ e $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)dx$ convergem então, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, a integral $\displaystyle\int_a^{\infty} \big(\alpha f(x) \pm g(x)\big)\, dx$ converge e
$$\int_a^{\infty} \big(\alpha f(x) \pm g(x)\big)\, dx = \alpha \int_a^{\infty} f(x)dx \pm \int_a^{\infty} g(x)dx.$$

2. $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge se e só se $\displaystyle\int_b^{\infty} f(x)dx$ converge para algum $b > a$.

Prova. Para provar o primeiro item, basta observar que para qualquer $b > a$, tem-se

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) \pm g(x)\big)\, dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx\,,$$

pois f, g são integráveis no sentido usual em $[a, b]$. Fazendo $b \to \infty$ na igualdade acima, obtemos a igualdade enunciada.

Para o segundo item, basta observar que dados quaisquer $c > b > a$, temos

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx\,,$$

pois, por hipótese, a restrição de f a qualquer subintervalo limitado de $[a, \infty)$ é integrável. Portanto, existe $\displaystyle\int_a^\infty f(x) dx \doteq \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x) dx$ se e só se existe $\displaystyle\int_b^\infty f(x) dx \doteq \lim_{c\to\infty} \int_b^c f(x) dx$.

∎

Deixamos a cargo do leitor enunciar e provar o resultado acima nos demais contextos de integração imprópria.

Observando os exemplos (3), (4), (5) e (6), vemos que eles têm em comum o fato que os integrandos possuem primitivas conhecidas, o que simplificou bastante nossa vida... Entretanto, nem sempre temos à mão primitivas simples, por isso, é importante termos disponíveis outros critérios que nos permitam saber se determinada integral imprópria é convergente, mesmo que não seja possível, à primeira vista, calculá-la. O critério de Cauchy, que enunciaremos a seguir, é certamente o mais geral neste sentido e tem diversas aplicações.

Proposição 9 (Critério de Cauchy) Dada $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ no contexto de integração imprópria, são equivalentes as afirmações a seguir:

1. A integral $\displaystyle\int_a^\infty f(x) dx$ é convergente.

2. Para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $A > a$ tal que para quaisquer $c > b > A$ tem-se $\displaystyle\left|\int_b^c f(x)\right| < \varepsilon$.

Prova. O critério de Cauchy é consequência imediata do resultado a seguir, com $F(y) \doteq \displaystyle\int_a^y f(x) dx$, $y > a$. ∎

Lema 10 Seja $F : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. São verdadeiras as afirmações a seguir.

1. Existe $\lim_{y\to\infty} F(y)$.

2. Para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $A > a$ tal que para quaisquer $b, c > A$ tem-se $|F(c) - F(b)| < \varepsilon$.

Prova. Se $\lim_{y\to\infty} F(y) = L$ então dado $\varepsilon > 0$, por definição de limite, existe $A > a$ tal que para quaisquer $y > A$ tem-se $|F(y) - L| < \varepsilon/2$. Dados $b, c > A$, temos que $|F(c) - F(b)| \le |F(c) - L| + |L - F(b)| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Reciprocamente, se (2) é verificada, então fixemos uma sequência $\{y_n\}_n$ tal que $y_n \to \infty$. A hipótese (2) implica que a sequência $\{F(y_n)\}_n$ é de Cauchy, portanto, existe $L \doteq \lim_{n\to\infty} F(y_n)$.

Vamos provar que L independe de $\{y_n\}_n$. De fato, se $L' = \lim_{n\to\infty} F(z_n)$ para outra sequência $\{z_n\}_n$, $z_n \to \infty$ e $L' \neq L$, então tomando $\varepsilon \doteq |L' - L|/3 > 0$, obtemos $A > a$ tal que $b, c > A$ tem-se $|F(c) - F(b)| <$

$|L-L'|/3=\varepsilon$. Tomando $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n > A$ e $z_n > A$ para todo $n > N_1$, temos que $|F(z_n)-F(y_n)| < |L'-L|/3$ para todo $n > N_1$. Entretanto, como $L \doteq \lim_{n\to\infty} F(y_n)$ e $L' = \lim_{n\to\infty} F(z_n)$, segue que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|F(y_n)-L| < \varepsilon = |L'-L|/3$ e $|F(z_n)-L'| < \varepsilon = |L'-L|/3$ para todo $n > N_2$. Assim, se $n > \max\{N_1, N_2\}$, temos que

$$|L-L'| \le |L-F(y_n)| + |F(y_n)-F(z_n)| + |F(z_n)-L'| < |L-L'|/3 + |L-L'|/3 + |L-L'|/3 = |L-L'|,$$

uma contradição. Logo, $L = L'$.

Finalmente, basta provar que $L = \lim_{y\to\infty} F(y)$. De fato, se isto for falso, existem $\varepsilon > 0$ e uma sequência $\{w_n\}_n$, $w_n \to \infty$, tais que $|F(w_n)-L| \ge \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto contradiz o que mostramos no parágrafo anterior. ∎

Deixamos a cargo do leitor enunciar e provar o critério de Cauchy para os demais contextos de integração imprópria.

Observação 11 Outro contexto possível de integração imprópria ocorre quando temos uma função $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ cuja restrição a cada subintervalo $[a',b'] \subset (a,b)$ é limitada e integrável. Neste caso, diremos que f é integrável em (a,b) (ou que *a integral* $\int_a^b f(x)dx$ *converge* se para algum $c \in (a,b)$ as integrais $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$ convergem. Definimos, neste caso,

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

1.2 Funções positivas

Seja $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função no contexto de integração imprópria *positiva*. Para analisar a convergência da integral $\int_a^\infty f(x)dx$, devemos analisar o comportamento da função $F(b) \doteq \int_a^b f(x)dx$ quando $b \to \infty$. Entretanto, como f é positiva, vemos que F é *crescente*, e portanto,

$$\int_a^\infty f(x)dx \doteq \lim_{b\to\infty} F(b) = \sup_{b>a} F(b).$$

Portanto, a integral converge se e só se existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(b) \le C$, para todo $b > a$. (Porque?) Isto prova o primeiro resultado de convergência de integrais impróprias para funções positivas.

Proposição 12 Dada f como acima, são equivalentes as afirmações a seguir:

1. A integral $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.

2. Existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\int_a^b f(x)dx \le C$ para todo $b > a$.

Corolário 13 (Critério de comparação para funções positivas) Sejam $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ funções positivas no contexto de integração imprópria e suponhamos que $f(x) \le g(x)$ para todo $x \ge a$. São verdadeiras as afirmações a seguir:

1. Se $\int_a^\infty g(x)dx$ converge então $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.

2. Se $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge então $\int_a^\infty g(x)dx$ diverge.

Prova. De fato, dado qualquer $b > a$, temos que

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \le \int_a^\infty g(x)dx \equiv C,$$

logo, o resultado decorre da proposição (12).

∎

O critério de comparação acima é especialmente útil quando for fácil conseguir estimativas relacionando a função dada com outra função de comportamento conhecido.

Exemplo 14 Vamos mostrar que a integral imprópria

$$\int_0^\infty \frac{2x^2+3x+1}{3x^4+5x^3+2x+1}dx \tag{6}$$

é convergente. De fato, o integrando é uma função positiva em $[0,\infty)$ e

$$f(x) \doteq \frac{2x^2+3x+1}{3x^4+5x^3+2x+1} \le \frac{2x^2+3x+1}{3x^4} = \frac{2}{3x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{3x^4} \doteq g(x),$$

para $x > 0$. Pelo exemplo (4) e pelo primeiro item da proposição (8), segue que $\int_1^\infty f(x)dx$ converge. Usando o segundo item da referida proposição, concluímos que a integral (6) converge.

Exemplo 15 Neste exemplo, vamos tratar a mais famosa das integrais impróprias:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx. \tag{7}$$

Para analisar a convergência, pela paridade da função e^{-x^2}, basta provar que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ converge. Para $x > 1$, temos que $x^2 > x$, portanto, $0 < e^{-x^2} < e^{-x}$. Como $\int_1^\infty e^{-x}dx$ converge, segue pelo critério de comparação para funções positivas e pelo segundo item da proposição (8) que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ converge.

Há diversas maneiras de calcular o valor desta integral. Vamos descrever aqui uma delas. Consideremos $I_b \doteq \int_0^\infty e^{-x^2}dx$, $b > 0$. Temos que

$$\begin{aligned} I_b^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right) \\ &= \int_0^b\int_0^b e^{-x^2-y^2}dxdy \\ &= \iint_{Q_b} e^{-x^2-y^2}dxdy, \end{aligned}$$

pelo teorema de Fubini, onde Q_b denota o quadrado $[0,b]\times[0,b]$ no plano xy. Denotando por $D_R^+ \doteq \{(x,y) : x^2+y^2 \le R^2,\ x,y\ge 0\}$ o disco de raio $R>0$ e centro $(0,0)$ no primeiro quadrante, temos que $D_b^+ \subset Q_b \subset D_{b\sqrt{2}}^+$, para todo $b>0$. Usando coordenadas polares,

$$\iint_{D_R^+} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^R e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}).$$

Portanto,

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-b^2}) = \iint_{D_b^+} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \le \iint_{Q_b} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \le \iint_{D_{b\sqrt{2}}^+} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2b^2}).$$

Logo, para todo $b>0$, temos

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-b^2}) \le I_b^2 \le \frac{\pi}{4}(1-e^{-2b^2}).$$

Fazendo $b\to\infty$, concluímos que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} I_b = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, logo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

1.3 Convergência absoluta

Nesta seção, vamos introduzir uma forma de convergência mais forte de integrais, que possui consequências bastante interessantes.

Definição 16 Dada $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ no contexto de integração imprópria, dizemos que f *é absolutamente integrável* se $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ é convergente. Às vezes, nos referimos a este fato dizendo que *a integral* $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ *converge absolutamente.*

A definição de convergência absoluta de integrais nos demais contextos de integração imprópria (intervalos $[a,b)$, $(a,b]$ e $(-\infty,b]$) é análoga.

Dada uma função f como na definição (16), definimos as funções $f_+ \doteq \max\{f,0\}$ e $f_- \doteq -\min\{f,0\}$. Estas funções são chamadas de *parte positiva* e *parte negativa de* f, respectivamente.

A proposição abaixo contém algumas propriedades importantes destas funções.

Proposição 17 As afirmações a seguir são verdadeiras:

1. $f_+\ge 0$ e $f_-\ge 0$;
2. $f = f_+ - f_-$;
3. $|f| = f_+ + f_-$;
4. $f_+ = (f+|f|)/2$ e $f_- = (|f|-f)/2$;
5. f_+ e f_- também são funções no contexto de integração imprópria.

Prova. Vamos provar a última afirmação. De fato, pela afirmação 4, segue que em cada intervalo limitado $[a,b]$ os conjuntos $D_{f_+}([a,b])$ e $D_{f_-}([a,b])$ de pontos de descontinuidade de f_+ e de f_-, respectivamente, estão contidos no conjunto $D_f([a,b])$ de pontos de descontinuidade de f em $[a,b]$. Como a restrição de f a $[a,b]$ é integrável, segue que $D_f([a,b])$ tem medida nula, portanto, $D_{f_+}([a,b])$ e $D_{f_-}([a,b])$ têm medida nula. Isso implica que as restrições de f_+ e f_- a $[a,b]$ são integráveis, logo f_+ e f_- estão no contexto de integração imprópria. ∎

Se f é absolutamente integrável, então $|f|$ é integrável; como $0 \le f_+ \le |f|$ e $0 \le f_- \le |f|$ e f_+, f_- são não-negativas e estão no contexto de integração imprópria, segue, pelo critério de comparação para funções positivas que f_+ e f_- são integráveis em $[a,\infty)$. Em particular, $f = f_+ - f_-$ também é integrável em $[a,\infty)$. Isso prova o corolário a seguir.

Corolário 18 Se f é absolutamente integrável, então f é integrável.

Mais adiante, veremos que a recíproca deste corolário é falsa.[2]

O critério de comparação para funções positivas é uma excelente ferramenta para provar a convergência de integrais, entretanto, esbarra em um problema de ordem prática: nem sempre é fácil conseguir desigualdades explícitas para fazer as comparações. Às vezes, o melhor que conseguimos é um *palpite* a respeito do comportamento assintótico da função no infinito (ou perto do extremo do intervalo). O critério de comparação que veremos a seguir fornece uma excelente ferramenta para estes casos.

Proposição 19 (Critério de comparação no limite) Sejam $f,g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ no contexto de integração imprópria e suponhamos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = L \in (0,\infty)\,.$$

Então, ou ambas as integrais $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|dx$, $\displaystyle\int_a^\infty |g(x)|dx$ convergem ou ambas divergem.

Prova. Fazendo $\varepsilon = L/2$ na definição de limite, obtemos $A > a$ tal que

$$L - \frac{L}{2} < \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < L + \frac{L}{2}\,,$$

para qualquer $x > A$. Disso, temos que $\dfrac{L}{2}|g(x)| < |f(x)| < \dfrac{3L}{2}|g(x)|$, para todo $x > A$. Pelo critério de comparação para funções positivas e pelo segundo item da proposição (8), segue o resultado. ∎

O resultado acima também é verdadeiro nos demais contextos de integração imprópria.

Exemplo 20 Vamos provar que a integral

$$\int_0^\infty \frac{x^2 - x\cos x}{2x^4 + \ln(1+x) + 1}\,dx$$

converge absolutamente. De fato, denotando o integrando por $f(x)$, e escrevendo $g(x) = 1/x^2$, temos que

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \frac{x^4 - x^3\cos x}{2x^4 + \ln(1+x) + 1} = \frac{1 - \frac{\cos x}{x}}{2 + \frac{\ln(1+x)}{x^4} + \frac{1}{x^4}} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1}{2}\,.$$

[2]Este é um resultado simples e marcante para a teoria de integração de Riemann. Na teoria de integração de Lebesgue, por exemplo, uma função integrável é, por definição, absolutamente integrável.

Exemplo 21 Dados $\alpha > 1$ e $\beta \geq 0$, as integrais do tipo $\int_1^\infty \frac{(\sin x)^\beta}{x^\alpha} dx$, $\int_1^\infty \frac{(\cos x)^\beta}{x^\alpha} dx$ convergem absolutamente. Basta comparar os integrandos com $g(x) = 1/x^\alpha$.

Exemplo 22 A integral imprópria $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^3}} dx$ converge (absolutamente). De fato, o integrando é contínuo em $[0,1)$ e tem limite igual a $+\infty$ quando $x \to \infty$. Portanto, basta analisar o que ocorre próximo de $x = 1$. Pondo $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^3}}$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, temos que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x/\sqrt{1-x^3}}{1/\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

logo, a integral converge se e só se $\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ converge. Fazendo $y = 1-x$ nesta última integral, temos

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \int_0^{1/2} \frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

Como a última integral converge, segue a conclusão.

Exemplo 23 Neste exemplo, vamos provar que as integrais do tipo

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \tag{8}$$

para $0 < \alpha \leq 1$ fixado, *não* convergem absolutamente.

Em primeiro lugar, se $0 < \alpha < 1$, temos que $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right) \cdot x^{1-\alpha} = 0$, logo, o integrando é contínuo em $x = 0$ (a integral não é imprópria na origem). O mesmo ocorre se $\alpha = 1$, pois neste caso $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. De fato, os zeros da função $\sin x$ em $(0,\infty)$ são da forma $k\pi$, para $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$. Como $\sin x \geq 1/2$, no intervalo $[\pi/6, 5\pi/6]$, temos que $|\sin x| \geq 1/2$ em cada subintervalo da forma $[k\pi + \pi/6, k\pi + 5\pi/6]$, para todo $k > 0$ inteiro (por que?). Portanto, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \\
&\geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi+\pi/6}^{k\pi+5\pi/6} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi+\pi/6}^{k\pi+5\pi/6} \frac{dx}{x^\alpha} \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k\pi)^\alpha} \int_{k\pi+\pi/6}^{k\pi+5\pi/6} dx \\
&= \frac{1}{2\pi^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi^{1-\alpha}}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}.
\end{aligned}$$

Como a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ diverge (pois $0 < \alpha \leq 1$), segue que $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx$ diverge. Veremos na próxima seção que (8) converge - este é um importante contraexemplo para demonstrar que recíproca do corolário (18) é falsa.

1.4 O Critério de Dirichlet

Nesta seção abordaremos um critério de convergência bastante útil, especialmente quando não são verificadas as condições que garantiriam convergência absoluta.

Proposição 24 Sejam $f,\varphi : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ funções contínuas e suponhamos que:

① φ seja decrescente e $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$;

② Existe uma constante $C > 0$ tal que $\left|\int_b^c f(x)\,dx\right| \le C$ para quaisquer $a < b < c$.

Então a integral $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\varphi(x)\,dx$ converge.

Prova. Vamos provar a afirmação usando o Critério de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, seja $A > a$ tal que $|\varphi(x)| \le \varepsilon/C$, se $x > A$. Fixados quaisquer $b, c > A$, $b < c$, pelo Teorema do Valor Médio para integrais, existe $a_0 \in [b,c]$ tal que

$$\left|\int_b^c f(x)\varphi(x)\,dx\right| = |\varphi(a_0)| \left|\int_b^c f(x)\,dx\right| \le \varepsilon/C \cdot C = \varepsilon.$$

Pelo Critério de Cauchy, segue a afirmação desejada.

∎

Exemplo 25 Usando o critério de Dirichlet, vemos que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ converge, se $0 < \alpha \le 1$. De fato, tomando $f(x) = \sin x$ e $\varphi(x) = 1/x^\alpha$ temos que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$ e $\left|\int_b^c f(x)\,dx\right| = |\cos b - \cos c| \le 2$ para quaisquer $c > b > 0$.

Exemplo 26 (Integrais de Fresnel) As integrais

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx, \quad \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$$

são chamadas de *Integrais de Fresnel*. Veremos que ambas convergem (não absolutamente). Este é um fato surpreendente, já que o integrando não tende a zero quando $x \to \infty$, mas permanece oscilando indefinidamente.

Na primeira integral, fazendo $x^2 = u$ e fixando $b > 0$ qualquer, temos que

$$\int_0^b \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{b^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du.$$

Pelo exemplo anterior, concluímos que $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ converge (mas não absolutamente). Uma argumentação análoga mostra que $\displaystyle\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ também converge.

Exemplo 27 Vamos estudar as integrais do tipo

$$\int_0^\infty x^\alpha \sin(x^\beta)\,dx,$$

para $\alpha, \beta > 0$. Fazendo a mudança de variável $u = x^\beta$, temos $dx = \dfrac{1}{\beta} u^{\frac{1}{\beta}-1} du$, logo

$$\int_0^\infty x^\alpha \sin(x^\beta)\,dx = \frac{1}{\beta}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u^{1-\frac{\alpha+1}{\beta}}}\,du,$$

e esta última integral converge se $\frac{\alpha+1}{\beta} < 1$, ou seja, se $\alpha + 1 < \beta$. A convergência não é absoluta em nenhum caso, pois o expoente do denominador é sempre menor que 1 (vide o exemplo (23).

Este exemplo mostra que é possível que uma integral convirja mesmo que o integrando assuma valores cada vez maiores quando $x \to \infty$.

1.5 Exercícios - Lista 1

1. Verifique se as integrais abaixo convergem, convergem absolutamente ou divergem, justificando suas respostas ($\alpha, \beta > 0$):

(1) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^\alpha)\,dx$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|^\alpha}\,dx$ (5) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$ (6) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,dx$

(7) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^2+2020\ln(1+x)}}{\sqrt[3]{x^7+3x^4+16}}\,dx$ (8) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}\,dx$ (9) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+\sin x+e^{-2x}}{x^2+x+1}\,dx$

(10) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3-2x^2+2020}{x^5+4x^2+1}\,dx$ (11) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha \sin x\,dx$ (12) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$

(13) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2-2\sin(7x)}{x^4+3x^2+\ln(1+x)}\,dx$ (14) $\displaystyle\int_0^1 x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\,dx$ (15) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3+\cos x-3}{x^4+x+1}\,dx$

(16) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x}\,dx$ (17) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\sqrt{x}+\sin(3x-2)}{x^3+5\ln x+1}\,dx$ (18) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \ln x\,dx$

(19) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}}\,dx$ (20) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x^2}\,dx$ (21) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}\,dx$

(22) (23) $\displaystyle\int_0^1 \ln x \ln(1+x)\,dx$ (24) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$

2. Classifique as afirmações abaixo em Verdadeiras ou Falsas, provando as verdadeiras e encontrando um contraexemplo para as falsas:

① Se $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ é convergente então $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

② Se $f > 0$ e $\int_a^\infty f(x)dx$ é convergente então $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

③ Se $f > 0$ é decrescente e $\int_a^\infty f(x)dx$ é convergente então $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

④ Se existe $\lim_{x\to\infty} xf(x)$ e para um certo $b > a > 0$ existem $C > 0$ e $\alpha > 2$ tais que $|f'(x)| \leq C/x^\alpha$ para todo $x > b$ então $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.

3. **(A Trombeta de Gabriel)** Para este exercício, precisamos lembrar dois fatos simples de Cálculo I, que descrevemos a seguir. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua positiva e S é a superfície obtida rotacionando o gráfico de f em torno do eixo x, então:

   (a) O volume do sólido delimitado por S (e pelos planos $y = a$ e $y = b$ é $\pi \int_a^b f(x)^2 dx$;

   (b) A área de superfície de S é $2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$.

   Considere a função $f(x) = 1/x$, $x > 1$ e a superfície S obtida por rotação do gráfico de f em torno do eixo x.

   ① Mostre que o volume do sólido (infinito) delimitado por S é igual a π.

   ② Mostre que a integral que representa a área de superfície de S é divergente.

   ③ Você consegue explicar o paradoxo abaixo?

   Com pouco mais de 3 *litros de tinta podemos "encher"a parte de dentro de S, mas nenhuma quantidade de tinta é suficiente para pintar S.*

   O nome *Trombeta de Gabriel* foi dado à superfície S pelo matemático italiano Evangelista Toricelli no século XVII e se refere à trombeta que o referido anjo tocará no Dia do Juízo Final, de acordo com a tradição cristã.

4. (Função Gamma) Definimos a *Função Gamma* por

$$\Gamma(x) \doteq \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

   para qualquer $x > 0$.

   ① Mostre que Γ é bem definida e use integração por partes para mostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Em particular, $\Gamma(n) = (n-1)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   ② Use o item anterior para mostrar que é possível estender de maneira coerente a função Γ para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1, -2, -3, \ldots$.

   ③ Mostre que $\Gamma(x) = 2\int_0^\infty e^{-s^2} s^{2x-1} ds$ para todo $x > 0$.

5. (Função Beta) Dados $x, y > 0$, a *Função Beta de Euler* é definida por

$$\mathrm{B}(x, y) \doteq \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

① Mostre que B é bem definida e $B(x,y) = B(y,x)$, para todos $x, y > 0$.

② Mostre que $B(x+1,y) = B(x,y)\cdot\dfrac{x}{x+y}$ e $B(x,y+1) = B(x,y)\cdot\dfrac{y}{x+y}$, o que nos permite estender a função B a qualquer par (x,y), exceto quando x ou y forem iguais a $-1,-2,-3,\ldots$.

③ Fazendo a mudança de variável $t = \sin^2\theta$, mostre que

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\,d\theta\,.$$

Nesta última integral, fazendo a mudança $t = \tan^2\theta$, mostre que

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du\,.$$

④ Integrando a função $f(t,u) = e^{-t^2-u^2}t^{2x-1}u^{2y-1}$ no quadrante $t^2+u^2 \le R^2,\ t \ge 0,\ u \ge 0$ e comparando com a integral em quadrados inscritos e circunscritos, conclua que

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,.$$

⑤ Mostre que

$$\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{2n}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1/2)}{2\Gamma(n+1)} = \frac{1\cdot3\cdot\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots(2n)}\,\frac{\pi}{2}\,,$$

e

$$\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{2n+1}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}{2\Gamma(n+3/2)} = \frac{2\cdot4\cdot\ldots(2n)}{1\cdot3\cdot\ldots(2n+1)}\,\frac{\pi}{2}\,,$$

2 Integrais dependendo de um parâmetro

Uma técnica matemática bastante comum para resolver problemas consiste em *complicar para facilitar*. Por exemplo, temos um problema de geometria plana que estamos com dificuldade para resolver. Então, transformamos o problema original em um problema de geometria espacial (que possivelmente seja até mais difícil), mas que pode ser resolvido em um ambiente *mais espaçoso*. Com alguma sorte, resolvemos este novo problema aparentemente mais difícil e obtemos a solução do primeiro problema como corolário. Este tipo de situação é comum e funciona bem em muitos casos.

No nosso caso, vamos agora estudar integrais (no sentido usual e também impróprias) que dependem de um parâmetro. Isso parece mais complicado do que estudar uma única integral (como fizemos na seção anterior), mas, em contrapartida, nos fornece um excelente conjunto de novas técnicas, que nos permitem inclusive calcular diversas integrais impróprias.

2.1 Primeiros conceitos

Consideremos uma função $f : I\times J \to \mathbb{R}$, $f = f(x,t)$, com I, J intervalos. Vamos admitir que o intervalo I seja de um dos tipos considerados na seção anterior: $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$ ou $(-\infty,\infty)$ e que para cada $t \in J$, a função $x \mapsto f(x,t)$ seja integrável em I. Podemos então considerar a função

$$F(t) \doteq \int_I f(x,t)\,dx\,, \tag{9}$$

definida para todo $t \in I$. Na equação (9), usamos a notação $\int_I$ para denotar a integral sobre o intervalo I, qualquer que seja o caso. Esta integral pode ser uma integral no sentido usual (por exemplo, quando f é uma função contínua e limitada) ou uma integral imprópria. Nesta seção, as letras I, J sempre denotarão intervalos, sendo que I é de um dos tipos acima.

Definição 28 A função F é chamada de *integral a um parâmetro.*

Exemplo 29 A função $f(x,t) = e^{-tx^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, satisfaz as condições requeridas para que

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx^2}\,dx,$$

seja uma integral a um parâmetro. Fazendo a mudança de variável $y = \sqrt{t}x$ e usando o exemplo (15), vemos que $F(t) = \sqrt{\dfrac{\pi}{t}}$, $t > 0$.

Exemplo 30 A função

$$F(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx, \ \ t \geq 0$$

também define uma integral a um parâmetro, pois a integral acima converge para qualquer $t \geq 0$. De fato, para $t = 0$, a convergência segue do critério de Dirichlet. Para $t > 0$, como

$$\left| e^{-tx}\frac{\sin x}{x} \right| \leq e^{-tx}, \ x \in \mathbb{R},$$

a integral *converge absolutamente*, pelo critério de comparação.

Exemplo 31 As funções Γ e B dadas por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

e

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

(conforme os exercícios (4) e (5) da seção anterior) também definem integrais a um parâmetro.

Exemplo 32 De acordo com o exemplo , temos que

$$F(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{-tx}\,dx = \frac{1}{t},$$

para qualquer $t > 0$ (de acordo com o exemplo (3)). A integral acima também define uma integral a um parâmetro. Como o resultado é uma função diferenciável em t, é de se esperar que a derivada em t possa ser calculada a partir da expressão que define F. Integrando por partes a expressão abaixo, vemos que

$$\int_0^{\infty} -xe^{-tx}\,dx = \left[x\frac{e^{-tx}}{t} \right]_{x=0}^{x\to\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx}}{t}\,dx = -\frac{1}{t^2}.$$

Isso mostra que

$$F'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^{\infty} e^{-tx}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt}e^{-tx}\,dx = \int_0^{\infty} -xe^{-tx}\,dx,$$

ou seja, a operação de derivação em t *comutou* com a integração em x. Iterando os cálculos que fizemos acima, temos que as derivadas de ordem superior de F têm a expressão

$$F^{(n)}(t) = \int_0^\infty (-1)^n x^n e^{-tx} dx = (-1)^n n! t^{-n-1},$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 33 A função

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{x} dx,$$

definida para $t \in \mathbb{R}$ também define uma integral a um parâmetro (pelo critério de Dirichlet). Fazendo a mudança de variáveis $y = tx$, vemos que $F(t) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy = C$ (veremos mais adiante que $C = \pi/2$). Portanto, $F'(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, mas derivando sob o sinal de integral, obtemos a integral

$$\int_0^\infty \cos(tx) dx$$

que não converge (por que?).

2.2 Convergência uniforme

Analisando os exemplos (32) e (33), podemos nos perguntar se é possível garantir que os cálculos que fizemos no exemplo (32) sejam verdadeiros em geral. De forma mais direta, a questão é: *Sob quais hipóteses podemos derivar sob sinal de integral?* Para responder esta e outras questões relacionadas, surge o conceito de *convergência uniforme para integrais a um parâmetro*, descrito a seguir separadamente em dois contextos de integração imprópria.

Definição 34 Seja

$$F(t) = \int_a^\infty f(x,t) dx, \ t \in J, \tag{10}$$

uma integral a um parâmetro. Dizemos que F *converge uniformemente em J* se dado $\varepsilon > 0$ existe $A > 0$ tal que

$$\left| F(t) - \int_a^b f(x,t) dx \right| = \left| \int_b^\infty f(x,t) dx \right| < \varepsilon$$

para todos $b > A$ e $t \in J$.

O primeiro critério para convergência uniforme é o *Critério de Cauchy*. Embora não seja um critério de fácil aplicação prática, este critério tem bastante aplicabilidade teórica.

Proposição 35 (Critério de Cauchy) As afirmações abaixo a respeito da integral a um parâmetro (17) são equivalentes:

1. (17) converge uniformemente em J;
2. Dado $\varepsilon > 0$, existe $A > a$ tal que para quaisquer $c > b > A$ e $t \in J$, tem-se $\left| \displaystyle\int_b^c f(x,t) dx \right| < \varepsilon$.

Prova. A prova desta proposição é consequência imediata do lema a seguir, cuja prova, análoga à prova do lema (36), é deixada como exercício. ∎

Lema 36 Seja $g : [a,\infty) \times J \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. São verdadeiras as afirmações a seguir.

1. Existe $G : J \to \mathbb{R}$ com a seguinte propriedade: para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $A > a$ tal que
$$|g(b,t) - G(t)| < \varepsilon\,,$$
para todos $b > A$ e $t \in J$, i.e., $\lim_{b\to\infty} g(b,t) = G(t)$, *uniformemente para* $t \in J$.

2. Para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $A > a$ tal que para quaisquer $b, c > A$ tem-se $|g(c,t) - g(b,t)| < \varepsilon$, para qualquer $t \in J$.

Deixamos a cargo do leitor definir convergência uniforme e enunciar o Critério de Cauchy nos demais contextos de integração imprópria.

Vamos agora discutir critérios que nos permitam decidir se uma integral a um parâmetro converge uniformemente. O critério mais simples (e forte) para convergência uniforme é o M-Teste de Weierstrass, que enunciamos a seguir.

Proposição 37 (M-Teste de Weierstrass) Sejam $f : I \times J \to \mathbb{R}$ e
$$F(t) \doteq \int_I f(x,t)\,dx \tag{11}$$
a integral a um parâmetro correspondente. Suponhamos que exista uma função $g : I \to \mathbb{R}$ positiva e *integrável* tal que $|f(x,t)| \le g(x)$, $x \in I$, $t \in J$. Então, (11) converge absoluta e uniformemente.

Prova. Vamos assumir que $I = [a,\infty)$ (os outros casos são análogos). Dado $\varepsilon > 0$, como g é integrável, pelo critério de Cauchy, existe $A > a$ tal que $\int_b^\infty g(x)\,dx \le \varepsilon$ para todo $b > A$. Portanto, para quaisquer $b > A$ e $t \in J$, temos
$$\left|F(t) - \int_a^b f(x,t)\,dx\right| \le \int_b^\infty |f(x,t)|\,dx \le \int_b^\infty g(x)\,dx \le \varepsilon\,,$$
mostrando que (11) converge absoluta e uniformemente em J. ∎

Exemplo 38 A integral a um parâmetro
$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx\,,\ \ t > 0\,,$$
converge em $(0,\infty)$. A convergência é uniforme e absoluta em cada intervalo da forma $[\alpha,\infty)$, para $\alpha > 0$. De fato, para qualquer $t \ge \alpha$,
$$|e^{-tx}\sin x| \le e^{-\alpha x}\,,\ \ x \ge 0\,,$$
portanto, basta aplicar o M-teste com $g(x) = e^{-\alpha x}$. Uma conclusão inteiramente análoga vale para as integrais a um parâmetro do tipo
$$G_n(t) = \int_0^\infty x^n e^{-tx}\sin x\,dx\,,\ \ t > 0\,.$$
Integrando por partes duas vezes a expressão que define F, vemos que $F(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, para todo $t > 0$.

Exemplo 39 A integral a um parâmetro

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\,dx\,,\;\; t \in \mathbb{R},$$

converge absoluta e uniformemente em $\mathbb{R}$. De fato, como $\left|\dfrac{\cos(tx)}{1+x^2}\right| \le \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, o resultado segue do M-teste de Weierstrass.

Exemplo 40 A integral a um parâmetro que define a função Γ

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\,dx\,,$$

converge absoluta e uniformemente em cada intervalo da forma $[0,\alpha]$, para qualquer $\alpha > 0$. De fato, se $t \in [0,\alpha]$, então $|e^{-x}x^{t-1}| \le e^{-x}x^{\alpha-1}$. Como esta última função é integrável em $[0,\infty)$ (por que?), o resultado segue do M-teste de Weierstrass.

O segundo critério que veremos sobre convergência uniforme é uma extensão do Critério de Dirichlet para convergência de integrais.

Proposição 41 (Critério de Dirichlet) Sejam $f, \varphi : [a,\infty) \times J \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que:

① Para cada $t \in J$, $\varphi(\cdot, t)$ é decrescente e $\lim_{x\to\infty} \varphi(x,t) = 0$ *uniformemente em* $t \in J$*;*

② Existe uma constante $C > 0$ tal que $\left|\int_b^c f(x,t)\,dx\right| \le C$ para quaisquer $a < b < c$ e $t \in J$.

Então a integral $\int_a^\infty f(x,t)\varphi(x,t)\,dx$ converge *uniformemente em* J.

Prova. Fixado $\varepsilon > 0$, tomemos $A > a$ tal que $|\varphi(x,t)| \le \varepsilon/C$ para todos $x \ge A$ e $t \in J$. Portanto, dados $t \in J$ e $c > b > A$, pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, obtemos para cada $t \in J$ um ponto $a_0(t) \in [b,c]$ tal que

$$\left|\int_b^c f(x,t)\varphi(x,t)\,dx\right| = |\varphi(a_0(t),t)| \left|\int_b^c f(x,t)\,dx\right| < (\varepsilon/C)C = \varepsilon\,.$$

O resultado segue pelo Critério de Cauchy (35).

∎

Exemplo 42 Consideremos a integral a um parâmetro

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\,,\;\; t \ge 0\,. \tag{12}$$

Tomando $f(t,x) = \sin x$ e $\varphi(t,x) = e^{-tx}/x$, temos que $\left|\int_b^c \sin x\,dx\right| \le 2$ para todos $c > b > 0$. Além disso, $\varphi(\cdot, t)$ é decrescente (por que?) e

$$|\varphi(t,x)| = \frac{e^{-tx}}{x} \le \frac{1}{x},$$

portanto $\lim_{x\to\infty} \varphi(x,t) = 0$ uniformemente em J (por que?). Portanto, (12) converge uniformemente em $[0,\infty)$.

2.3 Derivação sob sinal de integral

A primeira e mais simples consequência do conceito de convergência uniforme é descrita na proposição abaixo.

Proposição 43 Se $f : I \times J \to \mathbb{R}$ é contínua então a integral a um parâmetro

$$F(t) \doteq \int_I f(x,t)\,dx$$

é contínua em J.

Prova. Vamos provar este resultado na situação $I = [a, \infty)$ (os demais casos são análogos). Dado $\varepsilon > 0$, por convergência uniforme, existe $A > a$ tal que $\left|\int_A^\infty f(x,t)\,dx\right| < \varepsilon/4$ para todo $t \in J$. Fixados $t, t_0 \in J$ temos

$$\begin{aligned} |F(t) - F(t_0)| &= \left|\int_a^\infty f(x,t)\,dx - \int_a^\infty f(x,t_0)\,dx\right| \\ &\le \left|\int_a^A (f(x,t) - f(x,t_0))\,dx\right| + \left|\int_A^\infty f(x,t)\,dx\right| + \left|\int_A^\infty f(x,t_0)\,dx\right| \\ &\le \left|\int_a^A (f(x,t) - f(x,t_0))\,dx\right| + \varepsilon/2\,. \end{aligned}$$

Usando a compacidade do intervalo $[a, A]$, vemos que existe $\delta > 0$ tal que se $t \in J$ e $|t - t_0| < \delta$, então $|f(x,t) - f(x,t_0)| \le \varepsilon/2(A-a)$ *para todo* $x \in [a, A]$. (Veja a obsevação (44) Portanto, se $|t - t_0| < \delta$, temos que

$$|F(t) - F(t_0)| \le \int_a^A |f(x,t) - f(x,t_0)\,dx| + \varepsilon/2 \le \varepsilon/2(A-a)(A-a) + \varepsilon/2 = \varepsilon\,,$$

provando a continuidade de F em $t = t_0$. ∎

Observação 44 Vamos justificar a afirmação feita na proposição anterior. De fato, se a afirmação fosse falsa, obteríamos uma sequência $\{(x_m, t_m)\}_{m\ge1}$ em $[a, A] \times J$ tal que $t_m \to t_0$ e

$$|f(x_m, t_m) - f(x_m, t_0)| \ge \varepsilon/2(A-a)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $x_m \to x_0 \in [a, A]$. Logo, pela continuidade de f, temos que

$$\varepsilon/2(A-a) \le \lim_{m\to\infty} |f(x_m, t_m) - f(x_m, t_0)| = |f(x_0, t_0) - f(x_0, t_0)| = 0\,,$$

um absurdo.

Vamos agora provar um resultado sobre derivação sob o sinal de integral no caso de intervalos limitados. Nossa intenção é estender este resultado e seu corolário para integrais impróprias.

Proposição 45 (Regra de Leibniz) Seja $g : [a,b] \times J \to \mathbb{R}$, $g = g(x,t)$, uma função contínua tal que $g_t \doteq \dfrac{\partial g}{\partial t}$, a derivada parcial em relação a t, existe e é *contínua* em J. Considerando

$$F(t) \doteq \int_a^b g(x,t)\,dx\,, \quad t \in J\,,$$

a integral a um parâmetro correspondente a g, temos que F é diferenciável e

$$F'(t) = \int_a^b g_t(x,t)dx\,,\ t \in J.$$

Ou seja, $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_a^b g(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)dx.$

Prova. Não há perda de generalidade em supormos que J é um intervalo compacto contendo t em seu interior (por que?). Temos que

$$\begin{aligned}\frac{F(t+h)-F(t)}{h} - \int_a^b g_t(x,t) &= \int_a^b \left(\frac{g(x,t+h)-g(x,t)}{h} - g_t(x,t)\right)dx \\ &= \int_a^b \big(g_t(x,\xi(x,h,t)) - g_t(x,t)\big)\,dx\,,\text{pelo Teorema do Valor Médio}\,,\end{aligned}$$

onde $\xi(x,h,t)$ é um ponto entre t e $t+h$. Como g_t é uma função contínua no compacto $[a,b]\times J$, então g_t é *uniformemente contínua*. Em particular, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|s-t| < \delta$ então $|g_t(x,s) - g_t(x,t)| < \varepsilon/(b-a)$ para *todos* $x \in [a,b]$ *e* $s,t \in J$. Disso, segue que se $|h| < \delta$, então $|t - \xi(x,h,t)| \le |h| < \delta$, logo

$$\left|\frac{F(t+h)-F(t)}{h} - \int_a^b g_t(x,t)\right| \le \int_a^b \big|g_t(x,\xi(x,h,t)) - g_t(x,t)\big|\,dx \le \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon\,,$$

como queríamos. ∎

Vamos agora estender a proposição (45) para o caso de integrais impróprias.

Proposição 46 Seja $f : I\times J \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que f_t seja contínua. Suponhamos que a integral a um parâmetro

$$F(t) = \int_I f(x,t)dx\,,\ t\in J,$$

esteja bem definida e que a integral a um parâmetro

$$G(t) = \int_I f_t(x,t)dx\,,\ t\in J, \tag{13}$$

esteja bem definida e convirja *uniformemente*. Então F é diferenciável e $F'(t) = G(t)$, $t \in J$. De forma explícita, $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_I f(x,t)dx = \int_I \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx,\ t\in J.$

Prova. Vamos mostrar que, para quaisquer $t, t_0 \in J$, temos $F(t) = F(t_0) + \displaystyle\int_t^{t_0} G(s)ds$; como G é contínua, segue do Teorema Fundamental do Cálculo que $F' = G$.

Façamos no caso $I = [a,\infty)$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, $n > a$, consideremos

$$F_n(t) = \int_a^n f(x,t)dx\,,\ t\in J.$$

Evidentemente, $F_n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(t)$ para cada $t\in J$ fixado. Pela proposição (43), temos que cada F_n é contínua. Fixados $t_0, t\in J$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, segue que

$$F_n(t) = F_n(t_0) + \int_{t_0}^t F_n'(s)ds\,,\ n > a. \tag{14}$$

Pela proposição (45), temos que $F'_n(s) = \int_a^n f_t(x,s)dx$, $s \in J$, e portanto, $|F'_n(s) - G(s)| = \left|\int_n^\infty f_t(x,s)dx\right|$. Assim, pela convergência uniforme de (13), dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, $N > a$, tal que $|F'_n(s) - G(s)| < \varepsilon/|t - t_0|$, para todos $n > N$, $s \in J$. Em particular,

$$\left|\int_{t_0}^t F'_n(s)ds - \int_{t_0}^t G(s)ds\right| \leq \int_{t_0}^t |F'_n(s) - G(s)|ds \leq \frac{\varepsilon}{|t - t_0|}|t - t_0| = \varepsilon,$$

se $n > N$. Isso mostra que $\int_{t_0}^t F'_n(s)ds \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{t_0}^t G(s)ds$. Fazendo $n \to \infty$ na igualdade (14) (e mantendo $t, t_0 \in J$ fixados), temos que

$$F(t) = F(t_0) + \int_{t_0}^t G(s)ds.$$

Como t é arbitrário e G é contínua, segue, pelo Teorema Fundamental do Cálculo que $G(t) = F'(t)$, $t \in J$. ∎

Deixamos a cargo do leitor enunciar e provar as proposições (43) e (46) nos demais contextos de integração imprópria.

Exemplo 47 Consideremos a integral a um parâmetro do exemplo (42),

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx, \ t \geq 0. \tag{15}$$

Vimos que esta integral converge uniformemente para $t \in [0,\infty)$, portanto, F é contínua neste intervalo. Além disso, como a integral a um parâmetro

$$\int_0^\infty e^{-tx}\sin x dx = \frac{1}{1+t^2}$$

também converge uniformemente em cada intervalo da forma $[\alpha,\infty)$, para cada $\alpha > 0$, segue, pela proposição (46), que $F'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$, para todo $t > 0$. Em particular,

$$F(t) = -\arctan t + C, \ t \geq 0. \tag{16}$$

Fazendo $t = 0$, temos que $C = F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$. Como $|F(t)| \leq \int_0^\infty e^{-tx}dx \leq \frac{1}{t}$, fazendo $t \to \infty$ na equação (16), segue que $C = \pi/2$. Logo,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Exemplo 48 Consideremos a integral a um parâmetro

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2tx)dx, \ t \in \mathbb{R}.$$

Como $|e^{-x^2}\cos(2tx)| \leq e^{-x^2}$, $x, t \in \mathbb{R}$, segue, pelo M-Teste que F converge uniformemente em $\mathbb{R}$. Fazendo estimativas semelhantes, aplicando a proposição (46) e integrando por partes, concluímos que

$$F'(t) = -\int_0^\infty 2xe^{-x^2}\sin(2tx)dx = -2t\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2tx)dx = -2tF(t).$$

Como $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (pelo exemplo (15)), segue que $F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-t^2}$, ou seja,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2tx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-t^2}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 49 Fixado $a > 0$, consideremos a integral a um parâmetro

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{x(x^2+a^2)} dx, \ t \in \mathbb{R}.$$

Pelo M-Teste, F converge uniformemente em $\mathbb{R}$. Pelo exemplo (39) e pela proposição (46), segue que

$$F'(t) = \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{x^2+a^2} dx, \ t \in \mathbb{R}.$$

Pelo Critério de Dirichlet, a integral $\int_0^\infty \sin(tx) \frac{x}{x^2+a^2} dx$ converge uniformemente, portanto, novamente pela proposição (46), temos

$$F''(t) = -\int_0^\infty \sin(tx) \frac{x}{x^2+a^2} dx, \ t \in \mathbb{R}.$$

Disso, vemos que $F''(t) - a^2 F(t) = -\int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{x} dx = -\frac{\pi}{2}$. Como as soluções da equação diferencial homogênea $y'' - a^2 y = 0$ são da forma $y(t) = C_1 e^{at} + C_2 e^{-at}$ e $y_p(t) = \pi/2a^2$ é uma solução particular da equação $y'' - a^2 y = -\pi/2$, segue que F deve ser da forma

$$F(t) = C_1 e^{at} + C_2 e^{-at} + \pi/2a^2.$$

Como $F(0) = 0$ e $F'(0) = \int_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2a}$, segue que

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \pi/2a^2 &= 0 \\ aC_1 - aC_2 &= -\pi/2 \end{cases},$$

portanto $C_1 = 0$ e $C_2 = -\pi/2a^2$. Assim, concluímos que

$$\int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{x(x^2+a^2)} dx = -\frac{\pi}{2a^2} e^{-at} + \frac{\pi}{2a^2} = \frac{\pi}{2a^2}\left(1 - e^{-at}\right), \ t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 50 Segue do exemplo anterior que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-at}$$

e

$$\int_0^\infty \frac{x \sin(tx)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-at}.$$

Exemplo 51 Usando o exemplo (29) e o fato que as integrais da forma $\int_0^\infty x^{2n} e^{-tx^2} dx$ convergem uniformemente em cada intervalo da forma $[\alpha, \infty)$, para qualquer $\alpha > 0$ (por que?), segue da proposição (46) que

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-tx^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}} \sqrt{\pi},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.4 Mudança na ordem de integração

Nesta seção, vamos verificar se e quando é possível reverter a ordem de integração para integrais impróprias. Este é um tema muito interessante e delicado que possui diversas aplicações muito interessantes.

Comecemos estudando o caso mais simples, que é uma consequência direta da proposição (45).

Proposição 52 (Teorema de Fubini) Se $h : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então

$$\int_a^b \int_c^d h(x,t)\,dt\,dx = \int_c^d \int_a^b h(x,t)\,dx\,dt.$$

Prova. Consideremos a função $\varphi(u) \doteq \int_a^u \int_c^d h(x,t)\,dt\,dx$, $u \in [a,b]$. Definindo $k(x) \doteq \int_c^d h(x,t)\,dt$, $x \in [a,b]$, temos que k é contínua (por que?) e $\varphi(u) \doteq \int_a^u k(x)\,dx$, portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, φ é diferenciável e

$$\varphi'(u) = k(u) = \int_c^d h(u,t)\,dt\,,\ x \in [a,b]\,.$$

Consideremos também a função $\psi(u) \doteq \int_c^d \int_a^u h(x,t)\,dx\,dt$, $u \in [a,b]$. Escrevendo $g(u,t) \doteq \int_a^u h(x,t)\,dx$, temos que $\psi(u) = \int_c^d g(u,t)\,dt$ e $g_u(u,t) = h(u,t)$ (pela continuidade de h), logo, g_u é contínua, e, portanto, pela proposição anterior, temos que ψ é diferenciável e

$$\psi'(u) = \int_c^d g_u(u,t)\,dt = \int_c^d h(u,t)\,dt = \varphi'(u)\,,\ u \in [a,b]\,.$$

Como $\varphi(a) = \psi(a) = 0$, segue que $\varphi = \psi$. Isso prova o corolário. ∎

A primeira extensão que faremos do resultado acima para integrais impróprias será tratada na próxima proposição e mostra a importância do conceito de convergência uniforme de integrais.

Proposição 53 Seja $f : [a,\infty) \times J \to \mathbb{R}$ contínua e

$$F(t) \doteq \int_a^\infty f(x,t)\,dx\,,\ t \in J\,, \tag{17}$$

a integral a um parâmetro correspondente. Vamos assumir que (17) convirja uniformemente. Então, dado $[\alpha,\beta] \subset J$, temos que $\int_\alpha^\beta F(t)\,dt = \int_a^\infty \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt\,dx$, ou seja,

$$\int_\alpha^\beta \int_a^\infty f(x,t)\,dx\,dt = \int_a^\infty \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt\,dx. \tag{18}$$

Prova. Pela convergência uniforme, dado $\varepsilon > 0$, existe $A > a$ tal que

$$\left| \int_a^b f(x,t)\,dx - F(t) \right| < \varepsilon/(\beta - \alpha)$$

para todo $b > A$. Portanto, pela proposição (52), segue que se $b > A$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt\,dx - \int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right| &= \left|\int_\alpha^\beta\int_a^b f(x,t)\,dx\,dt - \int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right| \\
&= \left|\int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,t)\,dx - F(t)\right)dt\right| \\
&\leq \int_\alpha^\beta\left|\int_a^b f(x,t)\,dx - F(t)\right|dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}(\beta-\alpha) = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Portanto, $\displaystyle\int_a^\infty\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt\,dx \doteq \lim_{b\to\infty}\int_a^b\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt\,dx = \int_\alpha^\beta F(t)\,dt.$ ∎

A inversão de ordem em integrais impróprias arbitrárias é bastante perigosa, conforme veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 54 Consideremos $f(x,t) = \dfrac{x-t}{(x+t)^3}$, $x,t \geq 1$. Fazendo a mudança de variáveis $u = x+t$, temos que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x-t}{(x+t)^3}\,dx = \frac{1}{1+t^2}$, portanto,

$$\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{x-t}{(x+t)^3}\,dx\,dt = \int_1^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Por outro lado, fazendo $v = x+t$, temos que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x-t}{(x+t)^3}\,dt = -\frac{1}{1+t^2}$, logo,

$$\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{x-t}{(x+t)^3}\,dt\,dx = -\int_1^\infty \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{\pi}{4}\,.$$

Vamos a seguir encontrar condições que nos permitam reverter a ordem de integração em geral.

Proposição 55 Seja $f : [a,\infty)\times[\alpha,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função *não-negativa* para a qual sejam verdadeiras as afirmações abaixo:

1. $$\int_\alpha^\beta\int_a^\infty f(x,t)\,dx\,dt = \int_a^\infty\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt\,dx\,, \text{ para todo } \beta > \alpha\,; \tag{19}$$

2. $$\int_\alpha^\infty\int_a^b f(x,t)\,dx\,dt = \int_a^b\int_\alpha^\infty f(x,t)\,dt\,dx\,, \text{ para todo } b > a\,. \tag{20}$$

Então, se uma das integrais $\displaystyle\int_\alpha^\infty\int_a^\infty f(x,t)\,dx\,dt$, $\displaystyle\int_a^\infty\int_\alpha^\infty f(x,t)\,dt\,dx$ converge então a outra também converge e ambas são iguais.

Prova. Vamos assumir que $\int_{\alpha}^{\infty}\int_{a}^{\infty} f(x,t)\,dx\,dt$ converge. Como f é não-negativa, temos $\int_{a}^{b} f(x,t)\,dx \le \int_{a}^{\infty} f(x,t)\,dx$, para qualquer $b > a$. Integrando esta desigualdade, temos

$$\int_{a}^{b}\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)\,dt\,dx = \int_{\alpha}^{\infty}\int_{a}^{b} f(x,t)\,dx\,dt \le \int_{\alpha}^{\infty}\int_{a}^{\infty} f(x,t)\,dx\,dt = C,\ \ b > a.$$

Pela proposição (12), segue que $\int_{a}^{\infty}\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)\,dt\,dx$ converge e é $\le \int_{\alpha}^{\infty}\int_{a}^{\infty} f(x,t)\,dx\,dt$.

A não-negatividade de f também implica que, para qualquer $\beta > \alpha$, temos $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)\,dt \le \int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)\,dt$. Integrando esta desigualdade, segue que

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{\infty} f(x,t)\,dx\,dt = \int_{a}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)\,dt\,dx \le \int_{a}^{\infty}\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)\,dx\,dt,$$

para todo $\beta > \alpha$. Novamente, pela proposição (12), segue que $\int_{\alpha}^{\infty}\int_{a}^{\infty} f(x,t)\,dx\,dt \le \int_{a}^{\infty}\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)\,dx\,dt$, provando a igualdade, como queríamos.

∎

Corolário 56 Seja $f : [a,\infty) \times [\alpha,\infty) \to \mathbb{R}$ para a qual são verificadas as equações (19) e (20). Se

$$\int_{\alpha}^{\infty}\int_{a}^{\infty} |f(x,t)|\,dx\,dt \tag{21}$$

converge, então ambas as integrais $\int_{\alpha}^{\infty}\int_{a}^{\infty} f(x,t)\,dx\,dt$ e $\int_{a}^{\infty}\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)\,dt\,dx$ convergem e

$$\int_{\alpha}^{\infty}\int_{a}^{\infty} f(x,t)\,dx\,dt = \int_{a}^{\infty}\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)\,dt\,dx. \tag{22}$$

Prova. Como (21) converge, decompondo $|f| = f_+ + f_-$ como na seção (1.3), segue (pelo critério de comparação) que ambas as integrais $\int_{\alpha}^{\infty}\int_{a}^{\infty} f_{\pm}(x,t)\,dx\,dt$ convergem. Como $f = f_+ - f_-$, segue que $\int_{\alpha}^{\infty}\int_{a}^{\infty} f(x,t)\,dx\,dt$ converge. Pela proposição (55), concluímos que $\int_{a}^{\infty}\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)\,dt\,dx$ converge e é verificada a equação (22). ∎

Corolário 57 Seja $f : [a,\infty) \times [\alpha,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que ambas as integrais

$$\int_{a}^{\infty} f(x,t)\,dx,\ t \ge \alpha, \tag{23}$$

e

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)\,dt,\ x \ge a, \tag{24}$$

convergem uniformemente. Então, se $\int_{\alpha}^{\infty}\int_{a}^{\infty} |f(x,t)|\,dx\,dt$ ou $\int_{a}^{\infty}\int_{\alpha}^{\infty} |f(x,t)|\,dt\,dx$ converge, temos que as integrais $\int_{\alpha}^{\infty}\int_{a}^{\infty} f(x,t)\,dx\,dt$ e $\int_{a}^{\infty}\int_{\alpha}^{\infty} f(x,t)\,dt\,dx$ convergem e vale (22).

Prova. De fato, a convergência uniforme de (23) e (24) implicam, pela proposição (53), que as equações (19) e (20) são verificadas. Pelo corolário anterior, segue a conclusão. ∎

Corolário 58 Seja $f:[a,\infty)\times[\alpha,\infty)\to\mathbb{R}$ contínua e suponhamos que existam funções não-negativas $\varphi:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ e $\psi:[\alpha,\infty)\to\mathbb{R}$ (ambas no contexto de integração imprópria) tais que $|f(x,t)|\leq\varphi(x)\psi(t)$, para todos $x\geq a$ e $t\geq\alpha$. Se as integrais

$$\int_a^\infty \varphi(x)dx\,,\ \int_\alpha^\infty \psi(t)dt$$

convergem então ambas as integrais $\int_\alpha^\infty\int_a^\infty f(x,t)dxdt$ e $\int_a^\infty\int_\alpha^\infty f(x,t)dtdx$ convergem e vale a igualdade (22).

Prova. De fato, fixado $\beta>\alpha$, temos que $|f(x,t)|\leq C\varphi(x)$, $x\in[a,\infty)$, onde $C=\sup_{t\in[\alpha,\beta]}\psi(t)$. Pelo M-teste de Weierstrass, segue que a integral $\int_a^\infty f(x,t)dx$ converge uniformemente para $t\in[\alpha,\beta]$. Pela proposição (53), segue que a equação (19) é verificada para todo $\beta>\alpha$. De forma inteiramente análoga, podemos verificar que a equação (20) também é verificada para todo $b>a$. Como

$$\int_a^\infty\int_\alpha^\infty |f(x,t)|dtdx \leq \int_a^\infty\int_\alpha^\infty \varphi(x)\psi(t)dtdx = \left(\int_a^\infty \varphi(x)dx\right)\left(\int_\alpha^\infty \psi(t)dt\right)$$

podemos então aplicar o corolário (56) e obter a conclusão desejada. ∎

Exemplo 59 Temos que a integral a um parâmetro $F(t)=\int_0^\infty e^{-tx}dx=\frac{1}{t}$ converge uniformemente em cada intervalo $[\alpha,\infty)$, para todo $\alpha>0$ (por que?). Portanto, pela proposição (53), para quaisquer $\beta>\alpha>0$ temos

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) &= \int_\alpha^\beta \frac{dt}{t}\\
&= \int_\alpha^\beta\int_0^\infty e^{-tx}dxdt\\
&= \int_0^\infty\int_\alpha^\beta e^{-tx}dtdx\\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx.
\end{aligned}$$

Exemplo 60 Neste exemplo, vamos dar uma prova diferente para a igualdade $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Denotemos o valor desta última integral por I e consideremos $f(x,y)=xe^{-x^2(1+t^2)}$, definida para $x\geq a>0$ e $t\geq 0$. Temos que

$$f(x,y)=(xe^{-x^2})(e^{-x^2t^2})\leq \underbrace{xe^{-x^2}}_{\doteq\varphi(x)}\cdot\underbrace{e^{-a^2t^2}}_{\doteq\psi(t)},$$

portanto, as hipóteses do corolário (58) estão verificadas (ou seja, podemos comutar a ordem de integração para f). Como

$$\int_a^\infty xe^{-x^2(1+t^2)}dx=\frac{e^{-a^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)}$$

integrando em t de zero a infinito e invertendo a ordem de integração temos

$$\frac{e^{-a^2}}{2}\int_0^{\infty}\frac{e^{-a^2t^2}}{1+t^2}dt=\int_a^{\infty}e^{-x^2}\int_0^{\infty}xe^{-x^2t^2}dxdt.$$

Fazendo a mudança de variável $y=tx$ na última integral, obtemos

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-a^2t^2}}{1+t^2}dt=2e^{a^2}I^2.$$

Fazendo $a\to 0^+$ na igualdade acima (veja o exercício (8)), concluímos que $\dfrac{\pi}{2}=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=2I^2$, portanto, $I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2.5 Exercícios - Lista 2

1. Verifique se as integrais a um parâmetro abaixo são uniformemente convergentes nos domínios indicados:

   ① $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos(tx^3)}{1+x^2}dx,\ t\in\mathbb{R}$

   ② $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{x^2+t^2}dx,\ t\neq 0$

   ③ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(tx)}{x^2+t^2}dx,\ |t|\geq\alpha,\ \alpha>0$ fixado

   ④ $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin(tx)}{x}dx,\ t\in\mathbb{R}$

   ⑤ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(tx)}{x^2}dx,\ t\in\mathbb{R}$

   ⑥ $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2-\frac{t^2}{x^2}}dx,\ t>0$

   ⑦ $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x}\cos(tx)dx,\ t\in\mathbb{R}$

   ⑧ $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{t}{x^2}e^{-x^2-\frac{t^2}{x^2}}dx,\ t>0$

2. Verifique para quais integrais a um parâmetro do exercício anterior é possível derivar sob o sinal da integral.

3. Justifique todas as afirmações deixadas como exercício nos exemplos desta seção.

4. Seja $F(t)=\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2-\frac{t^2}{x^2}}dx,\ t>0$.

   ① Faça a mudança de variáveis $y=t/x$ para mostrar que $F'(t)=-2F(t)$. Conclua que $F(t)=Ce^{-2t},\ t>0$.

② Mostre que $C = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, portanto

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{t^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2t}, \; t \geq 0.$$

5. Determine as expressões para as derivadas da função Gamma, justificando seus cálculos.

6. **(Transformada de Laplace)** Dada $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, a *transformada de Laplace* de f é definida como

$$\mathscr{L} f(s) \doteq \int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx, \; s > 0.$$

A transformada de Laplace é uma ferramenta muito útil para resolver certas equações diferenciais.

① Dizemos que f é de *crescimento exponencial* se existem $M, \alpha > 0$ tais que $|f(x)| \leq M e^{\alpha x}$, $x > 0$. Mostre que se f é de crescimento exponencial então $\mathscr{L} f$ é bem-definida (i.e., a integral converge) e $|\mathscr{L} f(s)| \leq \dfrac{M}{s-\alpha}$ para todo $s > \alpha$.

② Mostre que se f é de crescimento exponencial e diferenciável então $\mathscr{L}(f')(s) = s\mathscr{L} f(s) - f(0)$, $s > 0$. Encontre uma fórmula semelhante para $\mathscr{L}(f'')$;

③ Seja H_α a função que vale 1 se $t \geq \alpha$ e zero se $0 < t < \alpha$. Calcule LH_α.

④ Verifique as seguintes igualdades:

i. $\mathscr{L}(1)(s) = 1/s$

ii. $\mathscr{L}(e^{\alpha x})(s) = (s-\alpha)^{-1}$, $s > \alpha$

iii. $\mathscr{L}(x^n)(s) = n! s^{-n-1}$

iv. $\mathscr{L}(x^n e^{\alpha x})(s) = n!(s-\alpha)^{-n-1}$, $\alpha > 0$, $s > \alpha$

v. $\mathscr{L}(x^\alpha)(s) = \Gamma(\alpha+1) s^{-\alpha-1}$, $\alpha > 0$

vi. $\mathscr{L}(\sin(\alpha x))(s) = \dfrac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$, $\alpha > 0$

vii. $\mathscr{L}(\cos(\alpha x))(s) = \dfrac{s}{s^2+\alpha^2}$, $\alpha > 0$

viii. $\mathscr{L}(\sinh(\alpha x))(s) = \dfrac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$, $\alpha > 0$, $s > \alpha$

ix. $\mathscr{L}(\cosh(\alpha x))(s) = \dfrac{s}{s^2-\alpha^2}$, $\alpha > 0$, $s > \alpha$

7. **(Cálculo das integrais de Fresnel - uma possibilidade)** Sejam

$$I_t \doteq \int_0^\infty \cos(x^2) e^{-tx^2} dx, \; J_t \doteq \int_0^\infty \sin(x^2) e^{-tx^2} dx, \; t \geq 0.$$

Vamos calcular $I_0 = \displaystyle\int_0 \cos(x^2) dx$ e $J_0 = \displaystyle\int_0 \sin(x^2) dx$.

① Use a mudança de variáveis $u = x^2$ e o critério de Dirichlet para provar que I_t e J_t convergem uniformemente em $[0,\infty)$.

② Usando a fórmula de adição para a função cosseno, mostre que

$$I_t^2 - J_t^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \cos(r^2) e^{-tr^2} r dr d\theta, \; t > 0.$$

③ Usando o fato que $\cos u = \mathrm{Re}(e^{iu})$, conclua que a integral acima é igual a $\frac{\pi}{4}\frac{t}{t^2+1}$, ou seja,

$$I_t^2 - J_t^2 = \frac{\pi}{4}\frac{t}{t^2+1}\,,\ t>0\,.$$

Fazendo $t \to 0^+$, conclua que $I_0 = J_0$. Justifique a passagem ao limite.

④ Por outro lado, temos, de forma semelhante, que

$$I_t J_t = \frac{\pi}{8}\frac{1}{t^2+1}\,,\ t>0\,.$$

Fazendo $t \to 0^+$, conclua que $I_0 = J_0 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$, justificando a passagem ao limite. Portanto,

$$\int_0 \cos(x^2)\,dx = \int_0 \sin(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,.$$

8. No exemplo (60), vamos provar que $\lim\limits_{a\to 0^+}\int_0^\infty \frac{e^{-a^2t^2}}{1+t^2}dt = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$.

① Dado $\varepsilon > 0$ mostre que existe $A > 0$ tal que $\int_A^\infty \frac{dt}{1+t^2} < \varepsilon/4$.

② Prove que $|e^{-a^2t^2} - 1| \le (aA)^2$ para todo $t \in [0, A]$. (Dica: Use a identidade $e^{-u} - 1 = \int_0^u e^{-s}ds$, $u > 0$)

③ Conclua a demonstração do resultado.

9. Neste exercício, vamos trabalhar novamente com a integral de Fresnel

$$I = \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx\,.$$

Fazendo a mudança de variável $x^2 = t$, temos que $I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$.

① Lembrando que $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-tx^2}dx = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $t > 0$, podemos escrever

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-tx^2}\sin t\,dx\,dt\,.$$

Justifique a reversão de ordem na integral acima para concluir que $I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$.

② Usando outro método (por exemplo, o teorema dos resíduos), é possível mostrar que $I = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$. Há formas bem mais trabalhosas de fazer isto sem apelar para o teorema dos resíduos, vc pode consultar https://www.youtube.com/watch?v=YtorrokbFeA, por exemplo.