UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM212 - Análise II
Prof. Zeca Eidam

1 Sequências de funções

Muitas vezes, na resolução de problemas, nos deparamos com métodos iterativos para aproximar uma possível solução. Estes métodos produzem uma *sequência* que aproxima a solução procurada com a precisão desejada. Em muitos casos, não é possível encontrar, de forma direta, expressões para as soluções para determinados problemas de Análise e Equações Diferenciais, embora seja possível mostrar que estas soluções existam e tenham um comportamento até bem conhecido. Por isso, é importante termos uma teoria sólida que nos permita obter resultados de cunho geral para sequências de funções.

1.1 Primeiras ideias

Definição 1 Uma *sequência de funções reais* é uma família de funções f_n definidas em um conjunto X tomando valores em $\mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Neste texto, estudaremos sequências de funções reais definidas em subconjuntos $X \subset \mathbb{R}$ (na maior parte das vezes, X será um intervalo ou uma reunião deles). Uma tal sequência será denotada por $\{f_n\}_{n\geq 1}$.

O conceito mais elementar de convergência para uma sequência de funções é o de *convergência pontual*.

Definição 2 Dizemos que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *converge pontualmente* para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ se para cada $x \in X$, a sequência numérica $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f(x)$, ou seja, $f_n(x) \to f(x)$, para todo $x \in X$.

Vejamos alguns exemplos de sequências de funções. Eu exultaria de alegria se alguma boa alma pudesse plotar os gráficos das funções abaixo e me enviar... Seria lindo!

Exemplo 3 Seja $f_n(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Vemos que $f_n(x) \to 0$ para todo $x \in (-1,1)$, $1 = f_n(1) \to 1$ e que não existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ se $|x| > 1$. Assim, considerando g_n a restrição de f_n a $(-1,1)$, temos que $\{g_n\}_{n\geq 1}$ converge pontualmente para zero (i.e., a função nula neste domínio).

Exemplo 4 A sequência $f_n(x) = nx$, $x \in \mathbb{R}$, não converge pontualmente em nenhum ponto $x \neq 0$. No ponto $x = 0$, temos $0 = f_n(0) \to 0$.

Exemplo 5 Consideremos $f_n(x) = x^n(1-x^n)$, $x \in [0,1]$. Vemos que $f_n(x) \to 0$ para todo $x \in [0,1]$. Os pontos de máximo das f_n são da forma $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$ e $f_n(x_n) = \dfrac{1}{4}$, portanto, embora as f_n convirjam para zero, temos pontos nos quais todas elas valem $1/4$. Como $x_n \to 1$, isso nos dá a entender que a convergência é *mais lenta* perto de $x = 1$.

Exemplo 6 Seja $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $x \in [0,1]$. Como $\lim_{n\to\infty} na^n = 0$ para qualquer $a \in [0,1)$, segue que $f_n(x) \to 0$ para todo $x \in [0,1]$. Cada f_n atinge seu máximo no ponto $x_n = \dfrac{1}{n+1}$ e $f_n(x_n) =$

$\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to \frac{1}{e}$. Isso mostra que, embora todas as f_n tenham valor zero em $x=0$ (e portanto, convirjam para zero neste ponto), há pontos arbitrariamente próximos de $x=0$ nos quais as f_n's assumem valores arbitrariamente próximos da constante $1/e$. Ou seja, a convergência ocorre de forma mais *lenta* perto de $x=0$.

Alterando um pouco as f_n's, podemos produzir outro exemplo interessante. Pondo $g_n(x) = nf_n(x) = n^2x(1-x)^n$, $x \in [0,1]$, vemos que $g_n(x) \to 0$ para todo $x \in [0,1]$ (por que?). O máximo de cada g_n em $[0,1]$ é assumido no mesmo ponto x_n e vale $g_n(x_n) = n\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to \infty$. Assim, temos pontos arbitrariamente próximos da origem nos quais o valor das f_n fica arbitrariamente grande.

Exemplo 7 Considere as funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \le n \\ (n+1)(x-n), & \text{se } n \le x \le n+1 \\ n+1, & \text{se } x \ge n+1 \end{cases}$$

Temos que $f_n(x) = 0$ para todo $n \ge x$, portanto, evidentemente, $\{f_n\}_{n\ge1}$ converge pontualmente para zero. Entretanto, vemos que as f_n assumem valores cada vez maiores ($f_n(n+1) = n+1$, por exemplo).

Exemplo 8 Considerando $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$, temos que $|f_n(x)| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, portanto, $f_n \to 0$ pontualmente. Considerando a sequência das derivadas, $g_n(x) = f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$, vemos que $\{g_n\}_{n\ge1}$ não converge em nenhum ponto. (veja o exercício (18))

Exemplo 9 A sequência de funções $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $x \in \mathbb{R}$, converge pontualmente para 1 se $|x| > 1$, para $1/2$ se $|x| = 1$ e para 0 se $|x| < 1$,

Um tipo específico de sequência de funções são as *séries de funções*, que introduziremos na definição abaixo.

Definição 10 Dada uma sequência de funções $\{f_n\}_{n\ge1}$ em X, a *série de funções* associada a $\{f_n\}_{n\ge1}$ é a sequência $\{s_n\}_{n\ge1}$ definida em X da seguinte forma: colocamos $s_1 \doteq f_1$ e $s_n \doteq f_1 + \ldots + f_n$, $n \ge 1$. Esta série de funções é denotada também por $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ou $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge se a sequência $\{s_n\}_{n\ge1}$ converge. As funções s_n são chamadas de *reduzidas da série*.

Dizemos que uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é *absolutamente convergente* se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ é convergente.

Exemplo 11 Considerando na definição anterior as funções f_n da forma $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}$ fixados, a série de funções correspondente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

é chamada de *série de potências centrada em* $x = x_0$. Mais adiante, veremos várias propriedades deste tipo especial de série de funções.

Exemplo 12 Considerando na definição (10) as funções f_n da forma $f_n(x) = a_n \sin nx + b_n \cos nx$, para $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ fixados, $n \in \mathbb{N}$, a série de funções correspondente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx + b_n \cos nx$$

é chamada de *série de Fourier*. Este tipo de série também é muito importante e útil e também será estudado mais adiante.

Exemplo 13 Pondo $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$, $x > 0$, na definição (10), obtemos a importante série

$$\zeta(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

que é a famosa função ζ (zeta) de Riemann. A princípio, esta série converge para qualquer $x > 1$.

1.2 Convergência uniforme e consequências

Na seção anterior, pudemos perceber nos diversos exemplos que uma sequência de funções, mesmo convergindo pontualmente para determinada função, pode ter pouco a ver com a função limite. Do ponto de vista de aproximação, isto é um pouco indesejável, visto que muitas vezes, gostaríamos de obter propriedades da função limite a partir de propriedades das funções que compõem a sequência. O problema com a convergência pontual é que ela não ocorre *"da mesma forma"* para todos os pontos do domínio - às vezes, há porções do domínio em que a convergência *"demora para acontecer"*. O conceito de *convergência uniforme* que descreveremos a seguir fornece uma forma de convergência na qual este problema não ocorre.

Definição 14 Dizemos que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *converge uniformemente* para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todos $n \geq N$ e $x \in X$. Este fato será denotado por $f_n \xrightarrow{u} f$.

Evidentemente, uma sequência de funções que converge uniformemente também converge pontualmente. Vamos analisar os exemplos já vistos na seção anterior em relação à convergência uniforme.

Exemplo 15 Consideremos as funções f_n do exemplo (3). A convergência neste caso *não é uniforme*. De fato, fixando $m \in \mathbb{N}$ e pondo $\bar{x} = 1/\sqrt[m]{2} \in [0,1]$, temos que $|f_m(\bar{x}) - 0| = 1/2$.

Entretanto, $f_n \xrightarrow{u} 0$ uniformemente em qualquer intervalo do tipo $[0, a]$ para qualquer $a \in (0,1)$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{\varepsilon} > a$ para todo $n \geq N$. Então, $|f_n(x) - 0| = x^n \leq a^n \leq \varepsilon$ para todos $n \geq N$ e $x \in [0, a]$.

Exemplo 16 Vamos agora analisar as funções $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ do exemplo (5). Como no caso anterior, a convergência não é uniforme em todo o intervalo $[0,1]$ exatamente porque para cada $n \in \mathbb{N}$ obtemos pontos x_n nos quais temos $|f_n(x_n) - 0| = \dfrac{1}{4}$.

Mas se restringirmos as f_n's ao intervalo $[0, a]$ para $a \in (0,1)$ fixado, temos convergência uniforme. De fato, como o único ponto de máximo de f_n em $[0,1]$ é assumido em $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$, fixado $a \in (0,1)$, podemos tomar $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > a$ para todo $n \geq N_1$. Em particular, para estes n's, o máximo de

f_n em $[0,a]$ é assumido no ponto $x = a$. Escolhendo $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $a^n(1-a^n) < \varepsilon$ para todo $n \geq N_2$, temos que, para quaisquer $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ e $x \in [0,a]$,

$$|f_n(x) - 0| = f_n(x) \leq f_n(a) = a^n(1-a^n) < \varepsilon\,,$$

provando a convergência uniforme de $\{f_n\}_{n\geq 1}$ em $[0,a]$.

Argumentos semelhantes também provam que as funções do exemplo (6) não convergem uniformemente em $[0,1]$ mas convergem uniformemente em cada intervalo da forma $[a,1]$, para qualquer $a \in (0,1)$. (Veja o exercício (17)).

Exemplo 17 A sequência $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ do exemplo (8) converge uniformemente para zero, pois $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 18 A sequência $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ do exemplo (9) converge uniformemente em intervalos do tipo $[-a,a]$, para $0 < a < 1$ e também em intervalos do tipo $(-\infty, \alpha]$ e $[\beta, \infty)$ para quaisquer $\alpha < -1$ e $\beta > 1$. Esta sequência não converge uniformemente em nenhum intervalo que contenha algum dos pontos $x = 1$ ou $x = -1$.

Vamos agora apresentar uma caracterização um pouco mais técnica de convergência uniforme, que será muito útil em diversas situações.

Uma sequência de funções $\{f_n\}_{n\geq 1}$ definidas em X é dita *de Cauchy* se dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, para todos $m, n \geq N$ e $x \in X$. A principal utilidade deste conceito é dada na proposição a seguir.

Proposição 19 (Critério de Cauchy) As seguintes afirmações a respeito de uma sequência de funções reais $\{f_n\}_{n\geq 1}$ definidas em X são equivalentes:

(a) $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy.

(b) $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente.

Prova. Se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy, então para cada $x \in X$, a sequência numérica $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ é de Cauchy, portanto, podemos definir uma função $f : X \to \mathbb{R}$ pondo $f(x) \doteq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, para cada $x \in X$. Vejamos que $f_n \xrightarrow{u} f$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2$, para todos $m, n \geq N$ e $x \in X$. Fixando $n \geq N$ e fazendo $m \to \infty$ nesta última desigualdade, segue que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ para todo $x \in X$. Como $n \geq N$ é arbitrário, segue que $f_n \xrightarrow{u} f$.

A recíproca é deixada como exercício. ∎

Corolário 20 Uma série de funções $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ que converge absolutamente é convergente.

Prova. De fato, considerando a sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ das reduzidas de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, e $\{t_n\}_{n\geq 1}$ das reduzidas de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$, temos que $\{t_n\}_{n\geq 1}$ é convergente, em particular, $\{t_n\}_{n\geq 1}$ é de Cauchy. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, temos que

$$|s_n(x) - s_m(x)| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| = |t_n(x) - t_m(x)|\,,$$

para qualquer $x \in X$, portanto, temos que $\{s_n\}_{n\geq 1}$ é de Cauchy. Pelo Critério de Cauchy, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge. ∎

Observação 21 Assim como no caso de séries numéricas, não vale a recíproca do corolário anterior. Basta considerar a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, por exemplo.

A proposição a seguir oferece um critério bastante simples que nos permite verificar se determinada sequência de funções converge uniformemente.

Proposição 22 Seja $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções reais definidas em X e $f : X \to \mathbb{R}$. Suponhamos que exista uma sequência numérica $\{a_n\}_{n\geq 1}$ tal que:

1. $a_n \to 0$;

2. $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ para todos $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$.

Então $f_n \xrightarrow{u} f$.

Prova. Dado $\varepsilon > 0$ seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Portanto, $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n < \varepsilon$, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$, provando que $f_n \xrightarrow{u} f$. ∎

O critério de Cauchy fornece uma ferramenta muito especial e versátil para demonstrar a convergência absoluta de séries de funções, que descrevemos na proposição a seguir.

Proposição 23 (M-Teste de Weierstrass) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uma série de funções e suponhamos que exista uma sequência numérica $\{a_n\}_{n\geq 1}$ tal que $|f_n(x)| \leq a_n$, para todos $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergir então a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniforme e absolutamente em X.

Prova. Fixado $\varepsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=m+1}^{n} a_k < \varepsilon$ para todos $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Considerando a sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ das reduzidas de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, temos que, dados $m, n \in \mathbb{N}$, $N \leq m < n$,

$$|s_n(x) - s_m(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} a_k < \varepsilon,$$

para qualquer $x \in X$, portanto, temos que $\{s_n\}_{n\geq 1}$ é de Cauchy. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em X. A convergência absoluta se prova de forma semelhante.

∎

Exemplo 24 A série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ converge uniforme e absolutamente em qualquer intervalo da forma $[-a, a]$, para qualquer $a \in (0, 1)$. De fato, basta aplicar o M-Teste com $a_n = a^n$.

Agora vamos estudar um critério para convergência uniforme de séries de funções não necessariamente verificam convergência absoluta.

Proposição 25 (Critério de Dirichlet) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) f_n(x)$ uma série de funções em X tal que:

1. $\varphi_1(x) \geq \varphi_2(x) \geq \ldots \geq 0$ e $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$ uniformemente para todo $x \in [a,b]$;
2. Existe uma constante $C > 0$ tal que $\left|\sum_{n=1}^{k} f_n(x)\right| \leq C$ para todos $k \in \mathbb{N}$ e $x \in [a,b]$.

Então $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) f_n(x)$ converge uniformemente.

Prova. Vamos provar que a série satisfaz o Critério de Cauchy. Seja $s_k(x) \doteq \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$, $k \geq 1$. Então $f_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x)$ e, por hipótese, $|s_k(x)| \leq C$, para todos $k \in \mathbb{N}$ e $x \in [a,b]$. Portanto, para quaisquer $l > k \geq 1$ e $x \in [a,b]$, temos que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=k}^{l} \varphi_n(x) f_n(x)\right| &= \left|\sum_{n=k}^{l} \varphi_n(x)(s_n(x) - s_{n-1}(x))\right| \\
&= \left|\sum_{n=k}^{l} \varphi_n(x) s_n(x) - \sum_{n=k}^{l} \varphi_n(x) s_{n-1}(x)\right| \\
&= \left|\sum_{n=k}^{l} \varphi_n(x) s_n(x) - \sum_{n=k-1}^{l-1} \varphi_{n+1}(x) s_n(x)\right| \\
&= \left|\varphi_k(x) s_k(x) + \varphi_l(x) s_l(x) + \sum_{n=k-1}^{l-1} (\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)) s_n(x)\right| \\
&\leq C\varphi_k(x) + C\varphi_l(x) + C \sum_{n=k-1}^{l-1} (\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)) \\
&= C\varphi_k(x) + C\varphi_l(x) + C\varphi_{k+1}(x) - C\varphi_l(x) \\
&= C\varphi_k(x) + C\varphi_{k+1}(x) \\
&\leq 2C\varphi_k(x).
\end{aligned}$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, escolhendo $N \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_n(x) < \varepsilon/2C$ para todos $n \geq N$ e $x \in [a,b]$, concluímos que $\left|\sum_{n=k}^{l} \varphi_n(x) f_n(x)\right| < \varepsilon$ para todos $l > k > N$ e $x \in [a,b]$, como queríamos. ∎

Exemplo 26 Fixado $\alpha > 0$, consideremos a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}, \;\; x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Se $\alpha > 1$, como $\frac{\sin nx}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$, então a série converge uniforme e absolutamente, pelo M-teste de Weierstrass. Se $0 < \alpha \leq 1$, então tomando $\varphi_n(x) = 1/n^\alpha$ e $f_n(x) = \sin nx$, observamos que a hipótese (1) do Critério de Dirichlet é verificada. Para a hipótese (2), observamos que, se $x \neq 2k\pi$, com k inteiro, então

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{k} \sin nx\right| &= \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{k} e^{inx}\right)\right| \\
&= \left|\mathrm{Im}\left(\frac{e^{i(k+1)x}-e^{ix}}{e^{ix}-1}\right)\right| \\
&= \left|\mathrm{Im}\left(\frac{e^{i(k+1/2)x}-e^{ix/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}\right)\right| \\
&= \left|\mathrm{Im}\left(\frac{e^{i(k+1/2)x}-e^{ix/2}}{2i\sin(x/2)}\right)\right| \\
&= \left|\frac{\mathrm{Im}\left(-i(e^{i(k+1/2)x}-e^{ix/2})\right)}{2\sin(x/2)}\right| \\
&= \left|\frac{\mathrm{Re}\left(e^{i(k+1/2)x}-e^{ix/2}\right)}{2\sin(x/2)}\right| \\
&= \left|\frac{(\cos((k+1/2)x)-\cos(x/2)}{2\sin(x/2)}\right| \\
&\leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}\,.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Critério de Dirichlet, podemos garantir a convergência uniforme da série (1) em qualquer intervalo da forma $[2k\pi-\delta, 2(k+1)\pi-\delta]$ para qualquer $\delta \in (0, 2\pi)$.

Vamos agora estudar algumas propriedades teóricas importantes da convergência uniforme.

Proposição 27 Seja $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções reais definidas em $[a,b]$ e suponhamos que $f_n \xrightarrow{u} f$, onde $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função. Dado $x_0 \in [a,b]$, suponhamos que exista $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = L_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Então existe $L = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Em outras palavras, vale

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,.$$

Prova. Vamos mostrar que $\{L_n\}_{n\geq 1}$ é de Cauchy. Como $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente, então $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é de Cauchy, portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/3$ para todos $x \in [a,b]$ e $m, n \geq N$. Fixados $m, n \geq N$, podemos obter também um ponto $x \in [a,b]$ tal que $|f(x) - L_m| < \varepsilon/3$ e $|f(x) - L_n| < \varepsilon/3$. Portanto,

$$\begin{aligned}
|L_n - L_m| &\leq |f_n(x) - L_n| + |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - L_m| \\
&\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

provando que $\{L_n\}_{n\geq 1}$ é de Cauchy, e, portanto, convergente. Seja $L = \lim_{n\to\infty} L_n$.

Provemos agora que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|L_n - L| < \varepsilon/3$ e $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ para todos $x \in [a,b]$ e $n \geq N$. Como $\lim_{x\to x_0} f_N(x) = L_N$, existe $\delta > 0$ tal que $|f_N(x) - L_N| < \varepsilon/3$ se $0 < |x - x_0| < \delta$. Portanto, se $0 < |x - x_0| < \delta$, temos

$$\begin{aligned}
|f(x) - L| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - L_N| + |L_N - L| \\
&\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

provando o desejado. ∎

Corolário 28 Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uma série uniformemente convergente de funções em $[a,b]$ e suponhamos que exista $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = L_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, onde $x_0 \in [a,b]$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} L_n$ converge e $\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n$.

Corolário 29 O limite uniforme de uma sequência (série) de funções contínuas em um ponto é contínuo neste ponto.

É interessante observar as análises de convergência uniforme que fizemos nos exemplos (15) a (18) à luz do corolário (29).

A convergência uniforme também se comporta de maneira bastante interessante em relação à integração, conforme mostra a proposição a seguir.

Proposição 30 Se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de funções integráveis em $[a,b]$ que converge uniformemente para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ então f é integrável e

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Prova. Sejam D_n, D os conjuntos de pontos de descontinuidade de f_n e f, respectivamente. Pelo corolário (29), segue que $D \subset \bigcup_{n\geq 1} D_n$. Como cada D_n tem medida nula, segue que D tem medida nula, e portanto, f é integrável em $[a,b]$.

Dado $\varepsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon / b - a$, $x \in [a,b]$. Portanto, para todo $n \geq N$,

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

∎

Corolário 31 Se $f(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é uma série de funções integráveis em $[a,b]$ que converge uniformemente então f é integrável e

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Vamos agora estudar o que ocorre com as derivadas de uma sequência uniformemente convergente. Vimos no exemplo (17) que mesmo para uma sequência uniformemente convergente, a sequência das derivadas pode não ser sequer convergente. Ou seja, é possível que $f_n \xrightarrow{u} f$ sem que tenhamos $f_n' \xrightarrow{u} f'$. A proposição a seguir nos dá uma condição interessante para que este fato seja verdadeiro.

Proposição 32 Seja $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções que converge pontualmente para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e suponhamos que $f_n' \xrightarrow{u} g$ em $[a,b]$. Então f é diferenciável e $f' = g$.

Prova. Para provar o resultado, vamos assumir que as f_n' são contínuas, entretanto, o resultado vale sem esta hipótese[1]. Pelo corolário (29), segue que g é contínua e portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, basta provar que, fixados $x, x_0 \in [a,b]$, temos

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt. \tag{2}$$

[1]Veja *Elon Lima, Curso de Análise, Vol 1, Cap. X*

De fato, como as f_n's são diferenciáveis e cada f_n' é contínua, segue

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \to \infty$ nesta última igualdade e usando a proposição (30), concluímos que (2) é verificada, provando a proposição. ∎

1.3 Equicontinuidade e o Teorema de Arzelà-Ascoli

Em certas situações é possível que uma determinada sequência de funções contínuas não convirja, mas possua subsequências convergentes. Esta é uma propriedade bastante desejável que possui muitas aplicações interessantes. Uma aplicação muito interessante deste resultado que ocorre diversas vezes na prática é o seguinte: dada uma sequência pontualmente convergente de funções contínuas uniformemente limitadas,[2] sob que condições esta sequência possui uma subsequência *uniformemente convergente*?[3]

Fazendo um paralelo com o Teorema de Bolzano-Weierstrass em $\mathbb{R}$, podemos[4] pensar em uma sequência de funções em $[a,b]$ como uma família de sequências indexadas pelo parâmetro $x \in [a,b]$. Se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ for uniformemente limitada, então, para cada $x \in [a,b]$ a sequência $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ é limitada, portanto, possui uma subsequência convergente, digamos $\{f_{n_k}(x)\}_{k\geq 1}$. Será que conseguimos uma subsequência $\{f_{n_j}\}_{k\geq 1}$ tal que $\{f_{n_j}(x)\}_{k\geq 1}$ seja convergente para *qualquer* $x \in [a,b]$? Será que conseguimos convergência uniforme? Boas perguntas!

Exemplo 33 Observando os exemplos (5) e (6), vemos que nenhuma subsequência das $\{f_n\}_{n\geq 1}$ pode convergir uniformemente no intervalo $[0,1]$, pois, nos dois casos, $f_n \to 0$ pontualmente, mas existem sequências convergentes $\{x_n\}_{n\geq 1}$ em $[0,1]$ tais que $f_n(x_n) \to a \neq 0$. Entretanto, analisando as duas situações, vemos que, no exemplo (5), $f_n \xrightarrow{u} 0$ *uniformemente* em qualquer intervalo do tipo $[0,a]$, para qualquer $a \in (0,1)$ - ou seja, obtemos convergência uniforme em qualquer intervalo distante do ponto de *convergência lenta*. No exemplo (6), $f_n \xrightarrow{u} 0$ *uniformemente* em qualquer intervalo do tipo $[a,1]$, para qualquer $a \in (0,1)$.

O exemplo acima mostra que obter sequências uniformemente convergentes de sequências limitadas quaisquer pode ser impossível, em geral, entretanto, parece que ocorre algo de especial nos intervalos onde a *função limite está mais intimamente relacionada com as funções* f_n, ou, dito de outra forma, temos algo especial nas regiões onde *tanto as* f_n *quanto a função limite são contínuas da mesma forma*. O conceito de *equicontinuidade* descrito abaixo traduz matematicamente o que estamos querendo dizer.

Definição 34 Um conjunto $\mathscr{F}$ de funções contínuas em $[a,b]$ é dito *equicontínuo* no ponto $x = x_0$ se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ para qualquer $x \in [a,b]$ tal que $|x - x_0| < \delta$. O conjunto $\mathscr{F}$ é dito simplesmente *equicontínuo* se for equicontínuo em qualquer ponto de $[a,b]$.

Vejamos abaixo exemplos de conjuntos equicontínuos de funções em $[a,b]$.

[2] Isto significa que existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$.

[3] Do ponto de vista mais formal, o Teorema de Arzelà-Ascoli pode ser visto como um resultado que caracteriza *compacidade* no espaço de funções contínuas.

[4] O Teorema de Bolzano-Weierstrass afirma que qualquer sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Exemplo 35 Seja $\mathscr{F}$ um conjunto de funções contínuas em $[a,b]$ que admite uma constante $C>0$ tal que

$$|f(x)-f(y)|\le C|x-y|,$$

para todos $x,y\in[a,b]$. Então, $\mathscr{F}$ é equicontínuo em $[a,b]$. De fato, dado $\varepsilon>0$ tome $\delta=\varepsilon/C$.

Exemplo 36 Se $\mathscr{F}$ é um conjunto de funções de classe C^1 em $[a,b]$ e[5] existe $C>0$ tal que

$$\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|\le C, \text{ para toda } f\in\mathscr{F},$$

então $\mathscr{F}$ é equicontínuo. De fato, pelo Teorema do Valor Médio, dados $f\in\mathscr{F}$ e $x,y\in[a,b]$ existe $c\in[a,b]$ tal que

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)||x-y|\le C|x-y|,$$

e a afirmação segue do exemplo anterior.

Exemplo 37 As funções $f_n(x)=x^n(1-x^n)$, $0\le x\le 1$, que consideramos no exemplo (5) são tais que $f_n'(x)=nx^{n-1}(1-2x^{n-1})$, $0\le x\le 1$. Dado $a\in(0,1)$, se $x\in[0,a]$, temos

$$|f_n'(x)|\le na^{n-1}\le C$$

onde $C\doteq\sup_{x>0}xa^{x-1}$. (Por que?) Pelo exemplo (36), segue que o conjunto $\{f_n : n\ge 1\}$ é equicontínuo em $[0,a]$. É interessante observar que este conjunto de funções *não* é equicontínuo em nenhum intervalo contendo o ponto $x_0=1$, pois $f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)=\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\to 1$. A estimativa feita acima para as derivadas das f_n também falha no ponto $x_0=1$, pois $f_n'(1)=-n$ para cada $n\in\mathbb{N}$.

Teorema 38 (Arzelà-Ascoli) Seja $\{f_n\}_{n\ge1}$ uma sequência de funções contínuas uniformemente limitadas e equicontínuas. Então $\{f_n\}_{n\ge1}$ admite uma subsequência uniformemente convergente.

Prova. Seja $D=\{x_n : n\ge 1\}\subset[a,b]$ um conjunto denso enumerável. A sequência numérica $\{f_n(x_1)\}_{n\ge1}$ é limitada, portanto, admite subsequência convergente, digamos $\{f_{n_j^{(1)}}(x_1)\}_{j\ge1}$. A sequência $\{f_{n_j^{(1)}}(x_2)\}_{j\ge1}$ é limitada, portanto admite uma subsequência convergente, digamos $\{f_{n_j^{(2)}}(x_2)\}_{j\ge1}$. Procedendo indutivamente, obtemos famílias crescentes de números naturais $n_1^{(k)},n_2^{(k)},\dots$ tais que $\{n_1^{(k)},n_2^{(k)},\dots\}\supset\{n_1^{(k+1)},n_2^{(k+1)},\dots\}$ e cada linha abaixo representa uma sequência numérica convergente, cujo limite denotamos por $f(x_k)$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
f_{n_1^{(1)}}(x_1) & f_{n_2^{(1)}}(x_1) & f_{n_3^{(1)}}(x_1) & \dots & f_{n_j^{(1)}}(x_1) & \dots & \to f(x_1)\\
f_{n_1^{(2)}}(x_2) & f_{n_2^{(2)}}(x_2) & f_{n_3^{(2)}}(x_2) & \dots & f_{n_j^{(2)}}(x_2) & \dots & \to f(x_2)\\
f_{n_1^{(3)}}(x_3) & f_{n_2^{(3)}}(x_3) & f_{n_3^{(3)}}(x_3) & \dots & f_{n_j^{(3)}}(x_3) & \dots & \to f(x_3)\\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots & \vdots\\
f_{n_1^{(k)}}(x_k) & f_{n_2^{(k)}}(x_k) & f_{n_3^{(k)}}(x_k) & \dots & f_{n_j^{(k)}}(x_k) & \dots & \to f(x_k)\\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Para construir a subsequência procurada, vamos aplicar o argumento diagonal de Cantor ao esquema acima. Vamos mostrar que a subsequência $\{f_{n_k^{(k)}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente em D. De fato, dado

[5] Isto significa que cada $f\in\mathscr{F}$ é diferenciável em (a,b), existem as derivadas laterais $f'(a+)$ e $f'(b-)$ e cada função f' é contínua em $[a,b]$.

$j \geq 1$, a sequência $\{f_{n_k^{(k)}}(x_j)\}_{k\geq 1}$ é, a partir de seu j-ésimo termo, uma subsequência da sequência convergente $\{f_{n_l^{(j)}}(x_j)\}_{l\geq 1}$, portanto, é convergente. Pelo lema (39), segue que $\{f_{n_k^{(k)}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[a,b]$, como queríamos. ∎

Lema 39 Uma sequência equicontínua de funções $\{g_n\}_{n\geq 1}$ em $[a,b]$ que converge pontualmente em um subconjunto denso $D \subset [a,b]$ converge uniformemente em $[a,b]$.

Prova. Basta verificar que $\{g_n\}_{n\geq 1}$ satisfaz a condição de Cauchy em $[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $x \in [a,b]$ existe $\delta_x > 0$ tal que se $y \in [a,b]$ e $|y-x| < \delta_x$ então $|g_n(y) - g_n(x)| < \varepsilon/3$, $n \in \mathbb{N}$. Por compacidade do intervalo $[a,b]$, existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in [a,b]$ e $|x-y| < \delta$ então $|g_n(y) - g_n(x)| < \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos então obter uma partição do intervalo $[a,b]$ da forma $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ de forma que $x_j - x_{j-1} < \delta$ e escolher $y_j \in D \cap [x_{j-1}, x_j]$ para cada $j = 1, \ldots, N$. Como $\{g_n\}_{n\geq 1}$ converge pontualmente em D, segue que as sequências numéricas $\{g_n(y_1)\}_{n\geq 1}$, $\{g_n(y_2)\}_{n\geq 1}, \ldots, \{g_n(y_N)\}_{n\geq 1}$ são convergentes. Assim, podemos obter $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|g_m(y_j) - g_n(y_j)| < \varepsilon/3$ para quaisquer $m, n \geq N_0$ e $j = 1, \ldots, N$. Assim, dados $x \in [a,b]$, se $x \in [x_{j-1}, x_j]$ e $m, n \geq N_0$, temos

$$
\begin{aligned}
|g_n(x) - g_m(x)| &\leq |g_n(x) - g_n(y_j)| + |g_n(y_j) - g_m(y_j)| + |g_m(y_j) - g_m(x)| \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,
\end{aligned}
$$

como queríamos. ∎

Uma demonstração nas mesmas linhas do que fizemos anteriormente prova o seguinte corolário.

Corolário 40 Se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência equicontínua de funções em $[a,b]$ que converge pontualmente para uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ então $\{f_n\}_{n\geq 1}$ admite uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ que converge *uniformemente* para f.

1.4 Exercícios - Lista 3

1. Verifique o tipo de convergência (pontual ou uniforme) das sequências de funções abaixo nos domínios D indicados ($\alpha > 0$ fixado):

(1) $f_n(x) = x/n$, $D = \mathbb{R}$

(2) $f_n(x) = x/n$, $D = [a,b]$

(3) $f_n(x) = n\sin(x/n)$, $D = \mathbb{R}$

(4) $f_n(x) = n\sin(x/n)$, $D = [a,b]$

(5) $f_n(x) = 1/nx^2$, $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(6) $f_n(x) = 1/nx^2$, $D = \mathbb{R}\setminus(-\alpha,\alpha)$

(7) $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx^2+1}$, $D = [a,b]$

(8) $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx^2+1}$, $D = \mathbb{R}\setminus(-\alpha,\alpha)$

(9) $f_n(x) = \dfrac{n}{nx^2+1}$, $D = \mathbb{R}$

(10) $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx^2}}{x^{2020}+1}$, $D = \mathbb{R}$

(11) $f_n(x) = \sin(x/n)$, $D = \mathbb{R}$

(12) $f_n(x) = \sin(x/n)$, $D = [a,b]$

(13) $f_n(x) = n\arctan(x/n)$, $D = \mathbb{R}$

(14) $f_n(x) = n\arctan(x/n)$, $D = [a,b]$

(15) $f_n(x) = \cos(nx)$, $D = \mathbb{R}$

(16) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2x^4+1}$, $D = [0,1]$

(17) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2x^4+1}$, $D = \mathbb{R}\setminus(-\alpha,\alpha)$

(18) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $D = [a,b]$

(19) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $D = \mathbb{R}$

(20) $f_n(x) = \sqrt{\dfrac{1+nx^2}{n}}$, $D = \mathbb{R}$

(21) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, $D = \mathbb{R}$

(22) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, $D = \mathbb{R}\setminus(-\alpha,\alpha)$

(23) $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n^2}$, $D = \mathbb{R}$

(24) $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n^2}$, $D = \mathbb{R}\setminus(-\alpha,\alpha)$

(25) $f_n(x) = \cos^n x$, $D = [0,\pi]$

(26) $f_n(x) = n^2x(1-x)^n$, $D = [0,1]$

(27) $f_n(x) = x^n(1-x)^n$, $D = [0,1]$

(28) $f_n(x) = x^\alpha e^{-nx}$, $D = [a,b]$

(29) $f_n(x) = x^\alpha e^{-nx}$, $D = \mathbb{R}$

(30) $f_n(x) = \dfrac{1-\cos(nx^3+7)}{n}$, $D = \mathbb{R}$

(31) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$, $D = \mathbb{R}$

(32) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$, $D = [a,b]$

(33) $f_n(x) = n(\sqrt[n]{x}-1)$, $D = [a,b]$

(34) $f_n(x) = \dfrac{nx+x^2}{n^2}$, $D = [a,b]$

(35) $f_n(x) = x^n(1-x^n)$, $D = [a,b]$

(36) $f_n(x) = \dfrac{xe^{-x/n}}{n}$, $D = [a,b]$

(37) $f_n(x) = \dfrac{n(1-e^{-x/n})}{x}$, $D = [a,b]$

(38) $f_n(x) = \dfrac{n+\arctan(e^x-7)}{2n-3}$, $D = \mathbb{R}$

(39) $f_n(x) = n\ln\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)$, $D = [a,b]$

2. Analise as funções do exercício (1) em relação à equicontinuidade.

3. Mostre que se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de funções contínuas em $x = x_0$ que converge uniformemente para f em $[a,b]$ e $\{x_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência em $[a,b]$ que converge para x_0, então $\{f_n(x_n)\}_{n\geq 1}$ converge para $f(x_0)$.

4. Use o exercício anterior e o exercício (20) para trabalhar com os limites abaixo:

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2}\right)^n = e^{1/e}$

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{n+1}+(n+1)^n}{n^{n+1}}\right)^n = e^e$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-1)^{2n+1}}{n^{2n+1}(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$ (Dica: Use a expansão de Taylor da função arctan em $x=0$)

5. Seja $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções reais contínuas em $[a,b]$ tal que $f_1(x)\geq f_2(x)\geq\ldots\geq f_n(x)\geq\ldots$, $x\in[a,b]$. Se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge pontualmente para uma função contínua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ então a convergência é uniforme. O mesmo é verdadeiro se $f_1(x)\leq f_2(x)\leq\ldots\leq f_n(x)\leq\ldots$, $x\in[a,b]$. (Teorema de Dini)

6. Seja $F(t)=\int_a^\infty f(x,t)dx,\ t\in J$, uma integral a um parâmetro. Mostre que a integral converge uniformemente (conforme definimos no capítulo anterior) se e só se a sequência de funções

$$F_n(t)\doteq\int_a^n f(x,t)dx,\ t\in J,$$

converge uniformemente para F em J. Reobtenha os resultados sobre continuidade, derivação sob sinal da integral e comutação de integrais do capítulo anterior como corolários das proposições (29), (30) e (32).

7. Mostre que se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de funções que converge uniformemente em X_1 e em X_2, então $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente em $X_1\cup X_2$. O mesmo é verdadeiro para qualquer quantidade finita de conjuntos $X_1,\ldots,X_n$.

8. Mostre que se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de funções que converge uniformemente em X então $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente em qualquer subconjunto $Y\subset X$.

9. Uma função contínua $\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ é dita *linear por partes* se existir uma partição $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ tal que a restrição de ψ a cada subintervalo $[x_{j-1},x_j]$ seja uma função afim. Mostre que uma função contínua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é limite uniforme de uma sequência de funções lineares por partes em $[a,b]$.

10. Sejam $\{f_n\}_{n\geq 1}$, $\{g_n\}_{n\geq 1}$ sequências de funções em X tais que $f_n\xrightarrow{u}f$ e $g_n\xrightarrow{u}g$. Prove as afirmações a seguir:

    (a) $\alpha f_n+\beta g_n\xrightarrow{u}\alpha f+\beta g$ para quaisquer $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

    (b) Se $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais tais que $\alpha_n\to\alpha$ e existe $C>0$ tal que $|f_n(x)|\leq C$, para todos $x\in X$ e $n\in\mathbb{N}$, então $\alpha_n f_n\xrightarrow{u}\alpha f$.

    (c) Tem-se que $f_n g_n$ converge pontualmente para fg, mas a convergência pode não ser uniforme.

    (d) Se existir $C>0$ tal que $|f_n(x)|\leq C$ e $|g_n(x)|\leq C$, para todos $n\in\mathbb{N}$, $x\in X$, então $f_n g_n\xrightarrow{u}fg$.

    (e) Se existir $\alpha>0$ tal que $|f_n(x)|\geq\alpha$, para todos $x\in X$, $n\in\mathbb{N}$, então $\frac{1}{f_n}\xrightarrow{u}\frac{1}{f}$.

    (f) Se $I\subset\mathbb{R}$ é um intervalo que contém as imagens de todas as f_n's e de f e $\varphi:I\to\mathbb{R}$ é uma função *uniformemente contínua* então $\varphi\circ f_n\xrightarrow{u}\varphi\circ f$.

11. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e considere $f_n(x) \doteq f\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

    (a) Mostre que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge pontualmente para f se e só se f é contínua em $\mathbb{R}$.

    (b) Mostre que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente para f se e só se f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

12. Seja $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções contínuas em $\mathbb{R}$ que converge uniformemente para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência numérica que converge para $\alpha \in \mathbb{R}$.

    (a) Mostre que $g_n(x) \doteq f_n(x + \alpha_n)$ converge uniformemente para $g(x) \doteq f(x + \alpha)$.

    (b) Enuncie e prove uma versão deste resultado no caso de um intervalo $I \neq \mathbb{R}$.

13. Seja $D \subset [a,b]$ um subconjunto denso e $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções contínuas em $[a,b]$ tal que $f_n \xrightarrow{u} f$ em D. Mostre que se f é contínua em $[a,b]$ então $f_n \xrightarrow{u} f$ uniformemente em $[a,b]$.

14. Seja $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções que admite uma constante $C > 0$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq C|x - y|$$

    para todos $x, y \in [a,b]$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se $f_n \to f$ pontualmente, então $f_n \xrightarrow{u} f$.

15. Prove a seguinte recíproca do Teorema de Arzelà-Ascoli: *Um subconjunto $\mathscr{F}$ de funções contínuas em $[a,b]$ tal que toda sequência em $\mathscr{F}$ admite subsequência uniformemente convergente é necessariamente equicontínuo e uniformemente limitado.*

16. Mostre que se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência equicontínua e uniformemente limitada de funções em um intervalo qualquer $I \subset \mathbb{R}$, então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ que converge uniformemente em cada intervalo compacto $J \subset I$.

17. Prove as afirmações feitas no último parágrafo exemplo (16) a respeito das funções do exemplo (6).

18. Mostre que a sequência $g_n(x) = \sqrt{n}\cos nx$ do exemplo (8) não converge em nenhum ponto.

19. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada, podemos definir

$$\|f\|_\infty \doteq \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

    O número $\|f\|_\infty$ é chamada de *norma (do supremo)* de f. Mostre que são verificadas as seguintes afirmações (para quaisquer f, g limitadas em X):

    (a) $\|f\|_\infty \geq 0$ e $\|f\|_\infty = 0$ se e só se $f = 0$;

    (b) $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$;

    (c) $|\|f\|_\infty - \|g\|_\infty| \leq \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$;

    (d) $f_n \xrightarrow{u} f$ se e somente se $\|f_n - f\|_\infty \to 0$;

    (e) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy se e só se dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ para todos $m, n \geq N$.

(f) É possível que uma sequência de funções limitadas $\{f_n\}_{n\geq 1}$ seja tal que $\|f_n\|_\infty \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, mas não possua subsequência uniformemente convergente.

20. Consideremos as sequências de funções $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ e $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que ambas têm o mesmo limite, a saber, a função exponencial.

(a) Fixado $x \in \mathbb{R}$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x| < N$. Usando o fato que $k! \geq N^k$ todo $k > N$ (porque?), mostre que para qualquer $n > N$ tem-se

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|x|^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{|x|^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{|x|^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{n} \left(\frac{|x|}{N}\right)^k.$$

Conclua que, pelo M-Teste, a série $g(x) \doteq \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$ converge, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, sendo a convergência uniforme em cada intervalo limitado.

(b) Expandindo $f_n(x)$ através do binômio de Newton, mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = 1+x+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)x^3+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)x^n.$$

(c) Conclua que, para qualquer $x \geq 0$, $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f_n(x) \leq \ldots \leq g(x)$. Em particular, existe $f(x) \doteq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ e $f(x) \leq g(x)$, para qualquer $x \geq 0$.

(d) Fixado $N \in \mathbb{N}$, tomando qualquer $n \geq N$, temos que $f_n(x) \geq f_N(x)$, ou seja,

$$f_n(x) \geq 1+x+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)x^3+\ldots+\frac{1}{N!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{N-1}{n}\right)x^N,$$

para qualquer $x \geq 0$. Fazendo $n \to \infty$ e mantendo N fixado nesta última desigualdade, mostre que $f(x) \geq g_N(x)$. Conclua que $f(x) = g(x)$, $x \geq 0$. Isto pode ser tomado como definição da função exponencial para $x \geq 0$.

(e) Usando o fato que, para qualquer $\alpha \in [N, N+1]$, $N \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^n \leq \left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^\alpha \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1},$$

mostre que $\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{\alpha}\right)^\alpha = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = f(x)$, sendo o limite uniforme em cada intervalo limitado.

(f) Use o item anterior e o fato que

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{-n}$$

para mostrar que existe $f(x) \doteq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para qualquer $x < 0$, sendo o limite uniforme em qualquer intervalo limitado. Conclua que $f(-x) = 1/f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(g) Mostre que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

21. Uma função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é dita *simples* se sua imagem for um conjunto finito.

(a) Consideremos a sequência de subintervalos de $[0,1]$ definida da seguinte forma:

- ☞ $I_1^{(0)} = [0,1]$;
- ☞ $I_1^{(1)} = [0,1/2)$, $I_2^{(1)} = [1/2,2/2]$
- ☞ $I_1^{(2)} = [0,1/4)$, $I_2^{(2)} = [1/4,2/4)$, $I_3^{(2)} = [2/4,3/4)$, $I_4^{(2)} = [3/4,4/4]$;
- ☞ $\vdots$
- ☞ $I_1^{(k)} = [0,1/2^k)$, $I_2^{(k)} = [1/2^k,2/2^k)$, ..., $I_{2^k}^{(k)} = [(2^k-1)/2^k, 2^k/2^k]$;
- ☞ $\vdots$

Evidentemente, para cada $k \geq 1$, temos que os $I_j^{(k)}$ são dois a dois disjuntos e $I_1^{(k)} \bigcup \ldots \bigcup I_{2^k}^{(k)} = [0,1]$. Dada $f : X \to [0,1]$, consideremos $E_j^{(k)} \doteq f^{-1}(I_j^{(k)})$, $j = 1,\ldots,2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Mostre que, fixado $k \in \mathbb{N}$, os $E_j^{(k)}$ são dois a dois disjuntos e $E_1^{(k)} \bigcup \ldots \bigcup E_{2^k}^{(k)} = X$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

(b) Dado $k \in \mathbb{N}$, definimos $\varphi_k : X \to [0,1]$ pondo $\varphi_k(x) = \dfrac{j}{2^k}$ se $x \in E_j^{(k)}$. Como os $E_j^{(k)}$ são dois a dois disjuntos, segue que φ_k é bem definida, simples e $|\varphi_k(x) - f(x)| \leq 1/2^k$, para qualquer $x \in X$. Em particular, f é limite uniforme de uma sequência de funções simples.

(c) Dada $f : X \to \mathbb{R}$ limitada (digamos que $|f(x)| \leq M$, $x \in X$), considere a função $g = \dfrac{f+M}{2M}$. Mostre que a imagem de g está contida em $[0,1]$ e use este fato para obter uma sequência de funções simples $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergindo para f.

(d) Mostre que qualquer função $f : X \to \mathbb{R}$ é limite pontual de uma sequência de funções simples, sendo a convergência uniforme em qualquer subconjunto no qual f seja limitada.

22. Dado $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e $p \geq 1$, dizemos que uma sequência $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge para f na norma L^p se

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p \, dx = 0.$$

(a) Mostre que convergência na norma L^1 implica convergência na norma L^p para qualquer $p \geq 1$.

(b) Mostre que convergência uniforme implica convergência na norma L^p, para todo $p \geq 1$.

(c) Mostre que $f_n(x) = x^n$, $0 \leq x \leq 1$, converge na norma L^p, para todo $p \geq 1$.

(d) Seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função linear por partes que vale zero no intervalo $[0,2/n]$ e no ponto $x = 0$ e vale n no ponto $x = 1/n$. Mostre que $f_n \to 0$ pontualmente mas não na norma L^p.

(e) Seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função definida da seguinte forma: escrevemos $n = 2^k + l$, com $0 \leq l < 2^k$ e definimos f_n valendo 1 no intervalo $\left[\dfrac{l}{2^k}, \dfrac{l+1}{2^k}\right]$ e zero fora. Mostre que $f_n \to 0$ na norma L^p mas não converge pontualmente para nenhuma função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

1.5 Polinômios de Bernstein e o Teorema de Aproximação de Weierstrass

Nesta seção daremos uma prova do clássico teorema de Weierstrass, que afirma que qualquer função contínua no intervalo $[a,b]$ é limite uniforme de polinômios. Existem diversas provas muito interessantes deste belo resultado - vamos optar pela prova via polinômios de Bernstein.

Dada $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos o n-ésimo polinômio de Bernstein de f como

$$B_n(x) \doteq B_n(x; f) \doteq \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\,,\ x \in [0,1]\,.$$

O valor $B_n(x; f)$ pode ser visto como uma média ponderada dos valores $f(0), f\left(\frac{1}{n}\right), f\left(\frac{2}{n}\right)\ldots,$ $f\left(\frac{n-1}{n}\right), f(1)$ com pesos $\binom{n}{0}x^0(1-x)^n, \binom{n}{1}x^1(1-x)^{n-1}, \binom{n}{2}x^2(1-x)^{n-2}, \ldots, \binom{n}{n}x^n(1-x)^0$, respectivamente.

Em primeiro lugar, pondo $f_0(x) = 1$, temos

$$B_n(x; f_0) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1\,,\ x \in [0,1]\,,\ n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Multiplicando por x a identidade acima com $n-1$ em lugar de n e usando a identidade $\binom{n-1}{k} = \frac{k+1}{n}\binom{n}{k+1}$, temos

$$x = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} x^{k+1}(1-x)^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n}\binom{n}{k+1} x^{k+1}(1-x)^{n-(k+1)}$$

Fazendo $l = k+1$ e adicionando à soma o termo correspondente a $l = 0$ (que é nulo), temos

$$x = \sum_{l=0}^{n}\frac{l}{n}\binom{n}{l} x^l (1-x)^{n-l} = B_n(x; f_1)\,,$$

onde $f_1(x) = x$.

Multiplicando por x^2 a igualdade (3) com $n-2$ em lugar de n e usando a identidade $\binom{n-2}{k} = \frac{(k+2)(k+1)}{n(n-1)}\binom{n}{k+2}$, temos

$$\begin{aligned}
x^2 &= \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} x^{k+2}(1-x)^{n-2-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(k+2)(k+1)}{n(n-1)}\binom{n}{k+2} x^{k+2}(1-x)^{n-(k+2)} \\
&= \sum_{l=0}^{n}\frac{l(l-1)}{n(n-1)}\binom{n}{l} x^l (1-x)^{n-l}\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2 = \sum_{l=0}^{n}\left(\left(\frac{l}{n}\right)^2 - \frac{l}{n^2}\right)\binom{n}{l} x^l (1-x)^{n-l} = \sum_{l=0}^{n}\left(\frac{l}{n}\right)^2\binom{n}{l} x^l(1-x)^{n-l} - \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n}\frac{l}{n}\binom{n}{l} x^l (1-x)^{n-l}. \tag{4}$$

Combinando (3) e (4) e considerando $f_2(x) = x^2$, temos que

$$B_n(x; f_2) = \sum_{l=0}^{n} \left(\frac{l}{n}\right)^2 \binom{n}{l} x^l (1-x)^{n-l} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x\,.$$

Em particular, desenvolvendo o quadrado dentro do somatório, temos

$$\sum_{l=0}^{n} \left(x - \frac{l}{n}\right)^2 \binom{n}{l} x^l (1-x)^{n-l} = \frac{1}{n}(x - x^2) = \frac{1}{n} x(1-x)\,. \tag{5}$$

Esta última igualdade será especialmente útil para demonstrar a proposição a seguir.

Proposição 41 Para qualquer $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua temos que a sequência de polinômios $\{B_n(x; f)\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente para f em $[a, b]$.

Prova. Multiplicando a equação (3) por $f(x)$, temos $f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, portanto,

$$|f(x) - B_n(x; f)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \tag{6}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como f é uniformemente contínua existe $\delta > 0$ tal que se $|x - y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq \max\left\{\frac{1}{\delta^4}, \frac{M^2}{4\varepsilon^2}\right\}$ e fixemos $x \in [0,1]$. Dado $n \geq N$, vamos dividir a última soma em duas partes: uma parte para os índices k tais que $|x - k/n| < n^{-1/4}$ (denotada por Σ') e outra para os demais (denotada por Σ''). Logo,

$$\Sigma' \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Para estimar Σ'', observamos que para os índices k que aparecem nesta soma, temos $|x - k/n| \geq n^{-1/4}$, portanto, $(x - k/n)^2 \geq 1/\sqrt{n}$, logo,

$$\begin{aligned}
\Sigma'' &\leq 2M \sum_{k} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq 2M \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - k/n)^2}{(x - k/n)^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq 2M\sqrt{n} \sum_{k=0}^{n} (x - k/n)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= 2M\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} x(1-x)\right) \\
&= \frac{M}{2\sqrt{n}} \\
&< \varepsilon/2,
\end{aligned}$$

pois $x(1-x) \leq 1/4$, $x \in [0,1]$. Portanto, $|f(x) - B_n(x; f)| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. ∎

Fazendo uma reparametrização simples, concluímos o clássico resultado a seguir.

Teorema 42 (Weierstrass) Qualquer função contínua em $[a,b]$ é limite uniforme de uma sequência de polinômios.

Observação 43 Existem outras provas para o Teorema de Weierstrass, entretanto, a prova apresentada (devida a Bernstein) tem a vantagem que, além de ser totalmente construtiva, é possível também provar que, em um ponto $x \in [0,1]$ no qual f seja diferenciável, tem-se que $|B_n'(x;f) - f'(x)| \to 0$ quando $n \to \infty$, sendo a convergência uniforme no caso em que f seja de classe C^1.

1.6 Séries de Potências

Um tipo particularmente útil de série de funções são as chamadas *Séries de Potências*, que descreveremos a seguir.

Uma *série de pontências* em torno do ponto $x = x_0 \in \mathbb{R}$ é uma série de funções do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{7}$$

onde os $\{a_n\}_{n\geq 0}$ é uma sequência de números reais.[6]

Exemplo 44 Consideremos a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (i.e, $a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$ e $x_0 = 0$). Usando a identidade $(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^k) = 1-x^{k+1}$, vemos que, para qualquer $x \neq 1$, temos

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{1-x^{k+1}}{1-x},$$

portanto, a série converge se e só se existe $\lim_{k\to\infty} x^{k+1}$. Assim, a série converge se e só se $|x| < 1$ e, neste caso, seu valor é $\frac{1}{1-x}$. Esta é a chamada *série geométrica.*

Exemplo 45 A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, fixado $x \in \mathbb{R}$, temos, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}/(n+1)!}{|x|^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

logo, a série converge (absolutamente) em x, pelo Critério da razão para séries.

Exemplo 46 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ converge no intervalo $(-1,1]$. De fato, o critério da razão implica convergência em $(-1,1)$ e o critério de Dirichlet (ou Leibniz) implica convergência em $x = 1$. A série não converge em $x = -1$ (quando $x = -1$, temos a série harmônica).

Veremos abaixo que o conjunto de pontos de convergência de uma série de potências é sempre um intervalo, inclusas ou não as extremidades.

Proposição 47 As seguintes afirmações a respeito da série de potências (7) são verdadeiras:

[6] Aqui convenciona-se que $0^0 = 1$.

1. Se a série de potências (7) converge para um certo $x_1 \in \mathbb{R}$ então a série converge absoluta e uniformemente em qualquer intervalo da forma $[x_0 - a, x_0 + a]$, com $0 < a < |x_1 - x_0|$.

2. O conjunto $C = \{x \in \mathbb{R} : (7) \text{ converge em } x\}$ é um intervalo de um dos tipos abaixo:

$$(x_0 - R, x_0 + R),\ [x_0 - R, x_0 + R),\ (x_0 - R, x_0 + R],\ [x_0 - R, x_0 + R],\ (-\infty, \infty).$$

   O número $R \geq 0$ é chamado de *raio de convergência* da série (7) e pode ser calculado através da *fórmula do raio de convergência*

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Prova. Seja $x_1 \neq x_0$ um ponto no qual (7) converge. Então, segue que $\lim_{n\to\infty} a_n(x_1 - x_0)^n = 0$, portanto, existe $C > 0$ tal que $a_n(x_1 - x_0)^n| \leq C$, para todo $n \geq 0$. Dado qualquer x tal que $|x - x_0| \leq a < |x_1 - x_0|$, temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x_1 - x_0)^n| \frac{x - x_0)^n}{(x_1 - x_0)^n} \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{x_1 - x_0}\right)^n.$$

Como a última série numérica converge (por que?), o item (1) segue pelo M-Teste de Weierstrass.

Provemos (2). Pelo item (1), segue que C é um intervalo centrado em x_0. Pondo $R = \sup\{t \in \mathbb{R} : (x_0 - t, x_0 + t) \subset C\}$, temos que $C \setminus (x_0 - R, x_0 + R)$ contém no máximo dois pontos (a saber $x_0 - R$ e $x_0 + R$).

Provemos agora a fórmula do raio espectral. Se a sequência $\sqrt[n]{|a_n|}$ é limitada, então a série (7) converge somente para $x = x_0$, pois, se $x \neq x_0$, então o termo geral $|a_n(x - x_0)^n| = (|x - x_0| \sqrt[n]{|a_n|})^n$ não tende a zero, logo a série não converge. Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ então a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, neste caso, pelo Critério da Raiz para séries, temos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

Consideremos agora o caso $0 < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$, digamos $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/r$, com $0 < r < \infty$. Temos neste caso que (7) converge se $|x - x_0| < r$ e diverge se $|x - x_0| > r$. De fato, isso decorre do fato que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ e do critério da raiz para séries numéricas. ∎

Observação 48 Em geral, nada se pode afirmar sobre a convergência ou não da série (7) nos pontos $x_0 + R$ e $x_0 - R$, caso R seja finito.

Corolário 49 A função $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ é contínua.

Prova. Este fato decorre do ítem (1) da proposição anterior e do corolário (29). ∎

Uma propriedade muito útil das séries de potências é que a *derivada formal*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \tag{8}$$

de uma série de potências também é uma série de potências. Como

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

segue que a série (8) tem o mesmo raio de convergência que a série original. Pelo item (1) da proposição (47) e pela proposição (32), segue que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

com convergência absoluta e uniforme em todo subintervalo fechado do intervalo de convergência. Um argumento parecido também prova que se $[a,b]$ está contido no intervalo de convergência, então

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(b-x_0)^{n+1}-(a-x_0)^{n+1}}{n+1}. \tag{9}$$

Esta argumentação prova o resultado a seguir.

Proposição 50 Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ é uma série de potências com raio de convergência $R > 0$, então

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} (x-x_0)^m,$$

com o mesmo raio de convergência R. Além disso, a igualdade (9) é verificada para qualquer intervalo $[a,b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$.

Corolário 51 Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ para todo $x \in I$, então $a_n = b_n$ para todo $n \geq 0$.

Prova. Fazendo $x = x_0$ na igualdade $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$, temos $a_0 = b_0$. Pela proposição (50), segue que $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n(x-x_0)^{n-1}$ em I. Fazendo $x = x_0$, obtemos $a_1 = b_1$. Aplicando este argumento sucessivamente por indução, obtemos $a_n = b_n$ para todo $n \geq 0$. ∎

Vamos agora estudar algumas propriedades aritméticas importantes para séries de potências. Dadas duas séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ em torno de x_0, com raios de convergência R_1 e R_2, respectivamente, e um número $\alpha \in \mathbb{R}$ não-nulo, temos que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + \alpha b_n)(x-x_0)^n$ tem raio de convergência igual a $\min\{R_1, R_2\}$.

Como fazer o produto de duas séries de potências? Observando o caso de polinômios, vemos que

$$\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n\right)\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n\right) =$$

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \ldots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0)x^{2n}.$$

Isso nos inspira a fazer algo semelhante com séries de potências.

Definição 52 Dadas séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ em torno de x_0, definimos o *produto de Cauchy* de ambas como a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, onde

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j, \quad n \geq 0. \tag{10}$$

O produto de Cauchy também pode ser definido para séries em geral: dadas duas séries numéricas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ definimos o produto de Cauchy de ambas as séries como a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, onde os c_n's também são dados pela fórmula (10).

Algumas perguntas interessantes surgem quando analisamos a definição do produto de Cauchy de séries. Uma delas é: qual o intervalo de convergência do produto de Cauchy de duas séries de potências? Outra questão interessante é saber se o produto de Cauchy de duas séries de potências coincide com o produto usual, ou seja, se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ e $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$, será que o produto de Cauchy de ambas as séries representa a função $f(x)g(x)$? Antes de respondermos estas questões, vejamos alguns exemplos simples.

Exemplo 53 Fazendo o produto de Cauchy da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ por ela mesma, obtemos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) &= 1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n+\ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'.\end{aligned}$$

Por outro lado, lembrando que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ e que $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, vemos que as igualdades acima expressam o fato que o produto de Cauchy de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ por si mesma coincide com $f(x)^2 = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ em todo o intervalo de convergência $(-1,1)$. Então, neste caso, o produto de Cauchy tem o mesmo intervalo de convergência que as séries originais e também representa o produto das funções.

Exemplo 54 Fazendo o produto de Cauchy da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} x^n$ por ela mesma, obtemos

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{j+1}\sqrt{n-j+1}}\right)}_{c_n} x^n. \tag{11}$$

Analisando os coeficientes c_n do produto acima, percebemos que, como $j+1 \leq n+1$ e $n-j+1 \leq n+1$, cada c_n é, a menos de sinal, uma soma de $n+1$ termos, sendo que cada um deles é $\geq 1/n+1$, ou seja, $|c_n| \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, a série original converge para $x=1$, mas o produto na equação (11) *não converge* para $x=1$. Isso mostra que o intervalo de convergência do produto de Cauchy de duas séries pode, em geral, ser menor que o intervalo de convergência das séries originais.

Vemos que o produto de Cauchy de duas séries de potências é comutativo. O teorema a seguir, devido a Mertens, dá condições simples para a convergência do produto de Cauchy de duas séries.

Teorema 55 (Mertens) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente para A e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge para B, então o produto de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \doteq \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$ converge para AB.

Prova. Sejam $A_n \doteq \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n \doteq \sum_{k=0}^{n} b_k$ e $C_n \doteq \sum_{k=0}^{n} c_k$. Queremos provar que $C_n \to AB$. Observamos que para qualquer $p \geq 0$, $C_p = \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} = \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{p} f_k(l)$, onde

$$f_k(l) \doteq \begin{cases} a_l b_{k-l}, & \text{se } l \leq k \\ 0, & \text{se } l > k \end{cases} .$$

Invertendo a ordem da soma, temos que

$$C_p = \sum_{l=0}^{p} \sum_{k=0}^{p} f_k(l) = \sum_{l=0}^{p} a_l \sum_{k=l}^{p} b_{k-l} = \sum_{l=0}^{p} a_l B_{p-l} = \sum_{l=0}^{p} a_l (B - d_{p-l}) = BA_p - e_p\,,$$

onde $d_k \doteq B - B_k$ e $e_k \doteq \sum_{j=0}^{k} a_j d_{k-j}$, $k \geq 0$. O resultado estará demonstrado se mostrarmos que $e_p \to 0$. Sejam $M \doteq \sup_{k\geq 1} |d_k|$ e $K \doteq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que

1. $\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2M}$ e
2. $|d_k| < \frac{\varepsilon}{2K}$ para todo $k > N$.

Logo, para qualquer $p > 2N$, temos

$$\begin{aligned} |e_p| &\leq \sum_{j=0}^{p} |a_j||d_{p-j}| \\ &= \sum_{j=0}^{N} |a_j||d_{p-j}| + \sum_{j=N+1}^{p} |a_j||d_{p-j}| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2K} \sum_{j=0}^{N} |a_j| + M \sum_{j=N+1}^{p} |a_j| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

∎

O Teorema de Mertens e a proposição (47) implicam o corolário a seguir.

Corolário 56 Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ e $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ são séries de potências com raios de convergência $R_1 > 0$ e $R_2 > 0$, respectivamente, então o produto de Cauchy $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ de ambas tem raio de convergência $\geq \min\{R_1, R_2\}$ e converge para o produto $f(x)g(x)$.

1.7 Exercícios

1. Mostre que se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua e $\int_0^1 f(x)x^n\,dx = 0$ para todo $n \geq 0$, então $f = 0$.

2. Prove que se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é de classe C^k então $\{B_n(x;f)^{(j)}\}_{n\geq 1}$ converge para $f^{(j)}$ para cada $j = 1,\ldots,k$.

3. Determine o intervalo de convergência das séries de potências a seguir:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n$ (2) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ (3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^3+1}$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n$ (5) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{3^n n}$ (6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

(7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{(2n)!}(x-7)^n$ (8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n}(x-e)^n$ (9) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x+3)^n$

(10) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n\sqrt{n+1}} x^n$ (11) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}(x-4)^{2n}$ (12) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} x^n$

(13) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{n^2}$ (14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n n} x^n$ (15) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$

(16) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{3n}$ (17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)} x^n$ (18) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2+(-1)^n)^n}$

(19) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n}$ (20) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n+3}{3^n+2}\right) x^n$ (21) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{5n+7}\right)^n x^n$

(22) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sin n) x^n$ (23) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n}$, $b > a > 0$ (24) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{5n+7}\right)^n x^n$

(25) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{n!}$ (26) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)} x^n$ (27) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)} x^n$

(28) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt[3]{n^2+3n}} x^{4n}$ (29) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}\right) x^n$ (30) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right) x^n$

(31) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n n!} x^n$ (32) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+7\sqrt{n+2}} x^n$ (33) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^{3/4}} x^n$

(34) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n+2)} x^n$ (35) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(7n)}{9+5^n} x^{(2n)!}$ (36) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) x^n$

(37) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n n!}{e^{n^2}} x^n$ (38) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \tan\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ (39) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[n]{n}}$

(40) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \ln n}{3^n n\sqrt{n}} x^n$ (41) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{3n}}$ (42) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\ln(n+1)}$

4. Expanda as funções abaixo em série de potências em torno do ponto x_0 indicado e determine o raio de convergência da série obtida:

   (1) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 \neq 0$ (2) $f(x) = \frac{x}{x-3}$, $x_0 \neq 0$ (3) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$, $x_0 \neq \pm 2$

   (4) $f(x) = \sinh x$, $x_0 = 0$ (5) $f(x) = \cosh x$, $x_0 = 0$ (6) $f(x) = \tan x$, $x_0 = 0$

   (7) $f(x) = x^3 - x^2$, $x_0 = 1$ (8) $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$, $x_0 = 3$ (9) $f(x) = \frac{x^3-1}{2x^2-1}$, $x_0 = 0$

5. Usando derivação e integração termo a termo, calcule as somas das séries abaixo:

   (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

   (4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ (5) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

   (7) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$ (8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ (9) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$

   (10) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ (11) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+4)x^n$ (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n}$

6. Usando as séries do exercício anterior (e outras parecidas...), calcule a soma das séries abaixo:

   (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{6^n}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(n-1)}$

   (4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5^n}$ (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{2n-1}}$

7. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências tal que seus coeficientes sejam relacionados por uma equação do tipo $a_n + Aa_{n-1} + Ba_{n-2} = 0$, com $A, B \in \mathbb{R}$, para $n \geq 2$. Mostre que para qualquer x no intervalo de convergência, tem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0 + (a_1 + Aa_0)x}{1 + Ax + Bx^2}.$$

8. Prove as identidades abaixo *(Sophomore Dreams)*:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \quad \text{e} \quad \int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}.$$

9. Mostre que são verificadas as identidades abaixo com convergência uniforme nos compactos de cada domínio:

   (a) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$

   (b) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$

   (c) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$

   (d) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, $-1 < x \leq 1$

   (e) $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$

   (f) $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $|x| \leq 1$

   (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$, $|x| < 1$

10. Utilizando a fórmula de Taylor, obtenha um valor aproximado de:

   (1) e, com erro inferior a 10^{-5} (2) $\sin 1$, com erro inferior a 10^{-7}

   (3) $\cos 1$, com erro inferior a 10^{-5} (4) $\ln 2$ e $\ln 3$, com erro inferior a 10^{-5}

   (5) e^2, com erro inferior a 10^{-5} (6) $\arctan(1/2)$ e $\arctan(1/3)$, com erro inferior a 10^{-5}

   (7) $\pi/4$, com^7 erro inferior a 10^{-5} (8) $\cos(1/2)$, com erro inferior a 10^{-5}

11. Estime as integrais abaixo:

   (1) $\int_0^1 \sin(t^2)\,dt$, com erro inferior a 10^{-5} (2) $\int_0^1 e^{t^3}\,dt$, com erro inferior a 10^{-7}

   (3) $\int_0^1 \ln(1+t^4)\,dt$, com erro inferior a 10^{-2} (4) $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$, com erro inferior a 10^{-7}

   (5) $\int_{-1}^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$, com erro inferior a 10^{-6} (6) $\int_0^1 \frac{1-\cos(t^2)}{t}\,dt$, com erro inferior a 10^{-7}

12. Desenvolva as funções abaixo em séries de potências em torno da origem, indicando o intervalo de convergência da série obtida em cada caso:

(1) $f(x) = x^k e^x,\ k \in \mathbb{N}$ (2) $f(x) = \cos(x+2)$ (3) $f(x) = \sin(x^2)$

(4) $f(x) = \cos^2 x$ (5) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ (6) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

(7) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$ (8) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\,dt$ (9) $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$

(10) $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$ (11) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3}$ (12) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^4}$

(13) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1+3x^2}\right)$ (14) $f(x) = e^{-x}\cos x$ (16) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

13. Seja $\alpha > 0$. Neste exercício, vamos encontrar uma expansão em série de potências para $(1+x)^\alpha$ em torno de $x = 0$.

    (a) Mostre que $y(x) = (1+x)^\alpha$ é solução da equação $(1+x)y' = \alpha y'$ em $(-1,\infty)$.

    (b) Mostre que a série de potências

    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

    tem raio de convergência igual a 1.

    (c) Mostre que a função $1 + g(x)$ também satisfaz a mesma equação diferencial do item (a) e vale 1 em $x = 0$. Conclua que

    $$(1+x)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\ |x|<1.$$

    Esta última série é chamada de *série binomial* e foi introduzida primeiramente por Newton nos casos $\alpha = \pm 1/2$. A igualdade acima generaliza (de forma fantástica) a fórmula usual do binômio de Newton e nos induz a definir, para qualquer $\alpha > 0$ *não-inteiro*

    $$\binom{\alpha}{n} \doteq \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}.$$

    Assim, para cada $x \in (-1,1)$, temos que

    $$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n.$$

    (d) Mostre que a série binomial converge uniformemente em $[-1,1]$. Uma possibilidade é utilizar o *Critério de Raabe*, que afirma que se $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se $L > 1$ ou $L = +\infty$ e diverge se $0 \le L < 1$. (Veja *Bartle R., The Elements of Real Analysis*, Chap. 7, Sec. 27)

14. Integre termo a termo a série binomial para $\alpha = -1/2$ para provar que

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

com convergência uniforme em $[-1,1]$. Conclua que

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)(2n+1)}.$$

15. (Teorema de Borel) Mostre que dada qualquer sequência numérica $\{a_n\}_{n\geq 0}$, existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $f^{(n)}(0) = a_n$, para todo $n \geq 0$.