UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM032 - Cálculo II - Turma A
Prof. José Carlos Eidam

1	
2	
3	
Nota	

GABARITO

PRIMEIRA PROVA - 30/06/2022

Nome: ____________________

GRR: ____________ **Assinatura:** ____________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas e pode usar sem provar todos os resultados utilizados em aula;
3. Você pode utilizar sem provar as expressões para polinômios de Taylor vistas em aula;
4. Faça a prova a lápis;
5. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 15h;
6. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
7. Boa prova!

Questão 1 Usando polinômios de Taylor, determine uma aproximação para cada um dos números abaixo com erro ε satisfazendo as condições explicitadas. Procure em todos os cálculos utilizar o polinômio de menor grau possível:

1. **(1,5 ponto)** e^2, $\varepsilon < 10^{-3}$

$$e^x = \overbrace{1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}}^{= p_n(x)} + E_n(x) \ , \quad E_n(x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} ,$$

COM c ENTRE ZERO E x.

P/ $x = 2$, TEMOS

$$|E_n(2)| = \frac{e^c \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{e^2 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} \leq \underbrace{\frac{9 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-3}}_{(*)} \ ??$$

(*) $9 \cdot 2^{n+1} \cdot 10^3 < (n+1)!$

O MENOR n COM ESTA PROPRIEDADE É $n = 11$. $\therefore$

$$e^2 \cong p_{11}(2) = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^{11}}{11!} , \quad \text{COM ERRO} < 10^{-3}$$

2. **(1,5 ponto)** $\cos(\sqrt{2})$, $\varepsilon < 10^{-3}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + E_{2n}(x) , \quad E_{2n}(x) = \frac{\cos^{(n+1)}(c) \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} ,$$

c ENTRE ZERO E x.

$$\text{P/ } x = \sqrt{2} , \quad |E_n(\sqrt{2})| \leq \frac{(\sqrt{2})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{2^n \cdot \sqrt{2}}{(2n+1)!} < \underbrace{\frac{2^n \cdot 2}{(2n+1)!} < 10^{-3}}_{(*)} \ ??$$

(*) $\underline{2^{n+1} \cdot 10^3 \overset{??}{<} (2n+1)!}$

O MENOR n COM ESTA PROPRIEDADE É $n = 4$ $\therefore$

$$\cos(\sqrt{2}) \cong 1 - \frac{2}{2!} + \frac{2^2}{4!} - \frac{2^3}{6!} + \frac{2^4}{8!} , \quad \text{COM ERRO} < 10^{-3}.$$

Questão 2 Determine os limites a seguir, se existirem:

1. **(1,5 ponto)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$ $= f(x,y)$

FAZENDO $(x,y) \to (0,0)$ PELO CAMINHO $\gamma_1(t) = (t, 0)$,

TEMOS $f(t,0) \equiv 0$.

MAS USANDO O CAMINHO $\gamma_2(t) = (t^4, t)$, TEMOS

$f(t^4,t) = \frac{t^4 . t^4}{t^8+t^8} = \frac{1}{2}$, $t \neq 0$ $\therefore$ PELA REGRA

DOS DOIS CAMINHOS, O LIMITE NÃO EXISTE.

2. **(1,5 ponto)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{e^x - \cos(xy)}\right)}{x^4+e^{xy}}$

$\underbrace{\qquad}_{\text{POSITIVO}}$

COMO $0 \leq x^4 \leq x^4 + e^{xy}$, TEMOS $0 \leq \frac{x^4}{x^4+e^{xy}} \leq 1$, (Δ)

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\therefore$ A EXPRESSÃO (Δ) É LIMITADA.

JÁ A FUNÇÃO $g : (x,y) \longmapsto \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{e^x - \cos(xy)}\right)$ É CONTÍNUA

POR SER COMPOSIÇÃO DE SOMAS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS,

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0) = \operatorname{sen} 0 = 0$.

LOGO,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^4}{x^4+e^{xy}}}_{\text{LIMITADA}} \cdot \underbrace{g(x,y)}_{\to 0} = 0.$$

UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM032 - Cálculo II - Turma A
Prof. José Carlos Eidam

1	
2	
3	
Nota	

GABARITO

PRIMEIRA PROVA - 30/06/2022

Nome: ______________________________

GRR: ______________ **Assinatura:** ______________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas e pode usar sem provar todos os resultados utilizados em aula;
3. Você pode utilizar sem provar as expressões para polinômios de Taylor vistas em aula;
4. Faça a prova a lápis;
5. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 15h;
6. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
7. Boa prova!

Questão 1 Usando polinômios de Taylor, determine uma aproximação para cada um dos números abaixo com erro ε satisfazendo as condições explicitadas. Procure em todos os cálculos utilizar o polinômio de menor grau possível:

1. **(1,5 ponto)** e^2, $\varepsilon < 10^{-3}$

$$e^x = \overbrace{1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}}^{= p_n(x)} + E_n(x) \quad , \quad E_n(x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} ,$$

COM c ENTRE ZERO E x.

P/ $x = 2$, TEMOS

$$|E_n(2)| = \frac{e^c \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{e^2 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{9 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-3} \ ??$$

(A) $9 \cdot 2^{n+1} \cdot 10^3 < (n+1)!$

O MENOR n COM ESTA PROPRIEDADE É $\underline{\underline{n = 11}}$. $\therefore$

$$e^2 \cong p_{11}(2) = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^{11}}{11!} , \quad \text{COM ERRO} < 10^{-3}$$

2. **(1,5 ponto)** $\cos(\sqrt{2})$, $\varepsilon < 10^{-3}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + E_{2n}(x) , \quad E_{2n}(x) = \frac{\cos^{(n+1)}(c) \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} ,$$

c ENTRE ZERO E x.

$$\text{P/ } x = \sqrt{2} , \quad |E_n(\sqrt{2})| \leqslant \frac{(\sqrt{2})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{2^n \cdot \sqrt{2}}{(2n+1)!} < \frac{2^n \cdot 2}{(2n+1)!} < 10^{-3} \ ??$$

(A) $\underline{2^{n+1} \cdot 10^3 \overset{??}{<} (2n+1)!}$

O MENOR n COM ESTA PROPRIEDADE É $\underline{\underline{n = 4}}$ $\therefore$

$$\cos(\sqrt{2}) \cong 1 - \frac{2}{2!} + \frac{2^2}{4!} - \frac{2^3}{6!} + \frac{2^4}{8!} , \quad \text{COM ERRO} < 10^{-3}.$$

Questão 2 Determine os limites a seguir, se existirem:

1. **(1,5 ponto)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8} = f(x,y)$

FAZENDO $(x,y) \to (0,0)$ PELO CAMINHO $\gamma_1(t) = (t,0)$,

TEMOS $f(t,0) \equiv 0$.

MAS USANDO O CAMINHO $\gamma_2(t) = (t^4, t)$, TEMOS

$f(t^4,t) = \frac{t^4 \cdot t^4}{t^8+t^8} = \frac{1}{2}$, $t \neq 0$ $\therefore$ PELA REGRA

DOS DOIS CAMINHOS, O LIMITE NÃO EXISTE.

2. **(1,5 ponto)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{e^x - \cos(xy)}\right)}{x^4+e^{xy}}$

COMO $0 \leq x^4 \leq x^4 + \underbrace{e^{xy}}_{\text{POSITIVO}}$, TEMOS $0 \leq \frac{x^4}{x^4+e^{xy}} \leq 1$, Δ

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\therefore$ A EXPRESSÃO Δ É LIMITADA.

JÁ A FUNÇÃO $g : (x,y) \longmapsto \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{e^x - \cos(xy)}\right)$ É CONTÍNUA

POR SER COMPOSIÇÃO DE SOMAS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS,

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0) = \operatorname{sen} 0 = 0$.

LOGO,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^4}{x^4+e^{xy}}}_{\text{LIMITADA}} \cdot \underbrace{g(x,y)}_{\to 0} = 0.$$

UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM032 - Cálculo II - Turma A
Prof. José Carlos Eidam

1	
2	
3	
Nota	

GABARITO

PRIMEIRA PROVA - 30/06/2022

Nome: ____

GRR: __________________ **Assinatura:** ________________________

ATENÇÃO!

1. **NÃO** é permitido utilizar calculadora nem consultar livros e anotações;
2. Você deve justificar todas as suas respostas e pode usar sem provar todos os resultados utilizados em aula;
3. Você pode utilizar sem provar as expressões para polinômios de Taylor vistas em aula;
4. Faça a prova a lápis;
5. A prova tem duração de **2** horas e você poderá deixar a sala somente após as 15h;
6. O gabarito estará disponível na internet após a realização da prova;
7. Boa prova!

Questão 1 Usando polinômios de Taylor, determine uma aproximação para cada um dos números abaixo com erro ε satisfazendo as condições explicitadas. Procure em todos os cálculos utilizar o polinômio de menor grau possível:

1. **(1,5 ponto)** e^2, $\varepsilon < 10^{-3}$

$$e^x = \overbrace{1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!}}^{=p_n(x)} + E_n(x), \quad E_n(x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!},$$

COM c ENTRE ZERO E X.

p/ $x = 2$, TEMOS

$$|E_n(2)| = \frac{e^c \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{e^2 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{9 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-3} \quad ??$$

(*) $9 \cdot 2^{n+1} \cdot 10^3 < (n+1)!$

O MENOR n COM ESTA PROPRIEDADE É $n = 11$. $\therefore$

$$e^2 \cong p_{11}(2) = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{2^{11}}{11!}, \quad \text{COM ERRO} < 10^{-3}$$

2. **(1,5 ponto)** $\cos(\sqrt{2})$, $\varepsilon < 10^{-3}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + E_{2n}(x), \quad E_{2n}(x) = \frac{\cos^{(n+1)}(c) \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

c ENTRE ZERO E x.

p/ $x = \sqrt{2}$, $$|E_n(\sqrt{2})| \leq \frac{(\sqrt{2})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{2^n \cdot \sqrt{2}}{(2n+1)!} < \frac{2^n \cdot 2}{(2n+1)!} < 10^{-3} \quad ??$$

(*) $2^{n+1} \cdot 10^3 \overset{??}{<} (2n+1)!$

O MENOR n COM ESTA PROPRIEDADE É $n = 4$ $\therefore$

$$\cos(\sqrt{2}) \cong 1 - \frac{2}{2!} + \frac{2^2}{4!} - \frac{2^3}{6!} + \frac{2^4}{8!}, \quad \text{COM ERRO} < 10^{-3}.$$

Questão 2 Determine os limites a seguir, se existirem:

1. **(1,5 ponto)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8} = f(x,y)$

FAZENDO $(x,y) \to (0,0)$ PELO CAMINHO $\gamma_1(t) = (t,0)$,

TEMOS $f(t,0) \equiv 0$.

MAS USANDO O CAMINHO $\gamma_2(t) = (t^4, t)$, TEMOS

$f(t^4,t) = \frac{t^4 \cdot t^4}{t^8+t^8} = \frac{1}{2}$, $t \neq 0$ $\therefore$ PELA REGRA

DOS DOIS CAMINHOS, O LIMITE NÃO EXISTE.

2. **(1,5 ponto)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{e^x - \cos(xy)}\right)}{x^4+e^{xy}}$

COMO $0 \leq x^4 \leq x^4 + \underbrace{e^{xy}}_{\text{POSITIVO}}$, TEMOS $0 \leq \frac{x^4}{x^4+e^{xy}} \leq 1$, (A)

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\therefore$ A EXPRESSÃO (A) É LIMITADA.

JÁ A FUNÇÃO $g : (x,y) \longmapsto \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{e^x - \cos(xy)}\right)$ É CONTÍNUA

POR SER COMPOSIÇÃO DE SOMAS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS,

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0) = \operatorname{sen} 0 = 0$.

LOGO,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^4}{x^4+e^{xy}}}_{\text{LIMITADA}} \cdot \underbrace{g(x,y)}_{\to 0} = 0.$$

3. **(1,5 ponto)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^3}{x^2+y^2}$

TEMOS $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ ∴

$$\frac{(x-y)^3}{x^2+y^2} = \overset{\nearrow 0}{x}\cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{LIMITADA}} - 3\overset{\nearrow 0}{y}\cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{LIMITADA}} + 3\overset{\nearrow 0}{x}\, \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{LIMITADA}} - \overset{\nearrow 0}{y}\, \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{LIMITADA}}$$

$$\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

Questão 3 Considere a função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(3x^2y)}{4x^2+y^2} - 7\cos(x-y) & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. **(1 ponto)** Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

f É SOMA DE COMPOSIÇÕES DE FUNÇÕES CONTÍNUAS EM $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\therefore$ É CONTÍNUA.

2. **(1,5 ponto)** Determine o valor de a para que f seja contínua em $(0,0)$.

TEMOS $$\frac{\operatorname{sen}(3x^2y)}{4x^2+y^2} = \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(3x^2y)}{3x^2y}}_{\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 1} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{3}x^2}{4x^2+y^2}}_{\text{LIMITADA}} \cdot \underbrace{3y}_{\to 0} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(3x^2y)}{4x^2+y^2} - 7\cos(x-y) = 0 - 7\cos 0 = -7.$$

$\therefore$ a DEVE SER IGUAL A -7 p/ QUE f SEJA CONTÍNUA EM $(0,0)$.