UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM032 - Cálculo II - Matemática Diurno - 2022/1
Prof. Zeca Eidam

Lista 1

✰ Polinômio de Taylor

1. Calcule o polinômio de Taylor de f de grau n no ponto x_0 indicado:

(1) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ (2) $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$ (3) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 = 0$

(4) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$ (5) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -1$ (6) $f(x) = \arctan x$, $x_0 = 0$

(7) $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$ (8) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $x_0 = 0$ (9) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3$, $x_0 = 1$

(10) $f(x) = \sinh x$, $x_0 = 0$ (11) $f(x) = \cosh x$, $x_0 = 0$ (12) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

(13) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 0$ (14) $f(x) = x\ln(1+x)$, $x_0 = 0$ (15) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = 0$

2. Use o polinômio de Taylor de ordem 2 e a fórmula de Taylor com resto de Lagrange para calcular um valor aproximado para cada um dos números abaixo, estimando o erro:

(a) $\ln(1,01)$ (b) $\operatorname{sen}(-0,01)$ (c) $\tan(-0,1)$ (d) $\sqrt[4]{16,1}$ (e) $\sqrt{8,97}$

(f) $\cos(\frac{\pi}{2} + 0,05)$ (g) $e^{0,07}$ (h) $\arctan(0,09)$ (i) $\ln(1,001)$ (j) $\cosh(-0,1)$

3. Use a fómula de Taylor com resto de Lagrange para mostrar as igualdades abaixo:

(a) $e^x = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ (b) $\operatorname{sen} x = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$

(c) $\cos x = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$ (d) $\ln(1+x) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, $|x| < 1$

(e) $\arctan x = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| \le 1$ (f) $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \lim\limits_{N\to\infty} 2\sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$

4. Utilizando o exercício anterior, obtenha um valor aproximado de:

(a) e, com erro inferior a 10^{-5} (b) $\operatorname{sen} 1$, com erro inferior a 10^{-7}

(c) $\cos 1$, com erro inferior a 10^{-5} (d) $\ln 2$ e $\ln 3$, com erro inferior a 10^{-5}

(e) e^2, com erro inferior a 10^{-5} (f) $\arctan(1/2)$ e $\arctan(1/3)$, com erro inferior a 10^{-5}

(g) $\pi/4$, com[1] erro inferior a 10^{-5} (h) $\cos(1/2)$, com erro inferior a 10^{-5}

5. Calcule $\dfrac{d^{320}\arctan}{dx^{320}}(0)$ e $\dfrac{d^{321}\arctan}{dx^{321}}(0)$

6. Estime as integrais abaixo:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(t^2)\,dt$, com erro inferior a 10^{-5} (b) $\displaystyle\int_0^1 e^{t^3}\,dt$, com erro inferior a 10^{-7}

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^4)\,dt$, com erro inferior a 10^{-2} (d) $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$, com erro inferior a 10^{-7}

   (e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$, com erro inferior a 10^{-6} (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(t^2)}{t}\,dt$, com erro inferior a 10^{-7}

7. Utilizando os polinômios de Taylor das funções envolvidas, calcule os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{x^2}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)}{x^5}$ (j) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)}{x^3}$

☆ **Funções reais de duas e três variáveis**

8. Ache e esboce o domínio das funções:

   (a) $f(x,y)=\sqrt{x-y}$ (b) $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$

   (c) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ (d) $f(x,y)=\dfrac{x}{y^x}$

   (e) $f(x,y)=\tan(x-y)$ (f) $f(x,y)=\ln(xy^2-x^3)$

   (g) $f(x,y)=\ln(16-4x^2-y^2)$

9. Esboce uma família de curvas de nível de:

   (a) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ (b) $f(x,y)=x-\sqrt{1-y^2}$

   (c) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2-y^2}$ (d) $f(x,y)=\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$

10. Esboce os gráficos de:

    (a) $f(x,y)=1-x-y$ (b) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+1}$ (c) $f(x,y)=\sqrt{x^2+9y^2}$

    (d) $f(x,y)=4x^2+y^2$ (e) $f(x,y)=y^2-x^2$ (f) $f(x,y)=y^2+1$

    (g) $f(x,y)=y^2+x$ (h) $f(x,y)=xy$ (i) $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

    (j) $f(x,y)=\dfrac{1}{4x^2+9y^2}$ (k) $f(x,y)=(x-y)^2$ (l) $f(x,y)=x^2+y^2+2y+3$

    (m) $f(x,y)=\dfrac{1}{(x^2+2y^2)^2}$ (n) $f(x,y)=\ln(9x^2+y^2)$ (o) $f(x,y)=2-\sqrt[4]{x^2+4y^2}$

    (p) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}$ (q) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}$

11. Seja $\gamma(t)=(e^t+1,e^{-t})$, para $t\in\mathbb{R}$.

    ① Desenhe a imagem de γ indicando o sentido de percurso.

② Verifique se a imagem de γ está contida em alguma curva de nível de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = x^2 y^2 - 2y - y^2 + 4.$$

Em caso afirmativo, em qual nível?

12. Seja $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$ e seja $\gamma(t) = (t \cos t, t \operatorname{sen} t, \sqrt{t^2 + 4}),\ t \geq 0$.
    (a) Mostre que a imagem de γ está contida no gráfico de f.
    (b) Façaa um esboço do traço de γ.

13. Encontre uma parametrização para a curva de nível no nível c de f nos casos:

    ① $f(x, y) = x + 2y - 3,\ \ c = -2;$

    ② $f(x, y) = x - \sqrt{1 - 2y^2},\ \ c = 5;$

    ③ $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2},\ \ c = 1.$

    Encontre a reta tangente às curvas dos itens (a), (b) e (c) acima nos pontos $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$, $(6, 0)$ e $(\sqrt{2}, 1)$, respectivamente.

14. Seja $f(x, y) = \dfrac{2x^2 + 4y^2}{x^2 + y^2 + 1}$.

    ① Esboce as curvas de nível de f dos níveis $c = 1$, $c = 2$ e $c = 3$.

    ② Encontre uma curva diferenciável γ cuja imagem seja a curva de nível de f do nível $c = 1$.

    ③ Determine o vetor tangente à curva γ do item anterior no ponto $(-1, 0)$.

    ④ Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, z(t))$. Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de f, encontre o vetor tangente a γ em $\gamma(\frac{\pi}{3})$.

✰ Limites e continuidade

15. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3-y}$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}\operatorname{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

(k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$

(l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{y^4+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$

(m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

(o) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$

(p) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\operatorname{sen}^2 y}{x^2+2y^2}$

16. Determine o conjunto dos pontos de continuidade das funções abaixo:

(a) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{e^x-y^2}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x-y^3}}{1-x^2-y^2}$

(c) $f(x,y) = \arctan(x+\sqrt{1/y})$

(d) $f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2)$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^3} & \text{, se } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{, se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)((x-1)^2+(y-1)^2)} & \text{, se } (x,y)\neq(0,0) \text{ e } (x,y)\neq(1,1) \\ 1 & \text{, se } (x,y)=(0,0) \text{ ou } (x,y)=(1,1) \end{cases}$