UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM032 - Cálculo II - Matemática Diurno - 2022/1
Prof. Zeca Eidam

Lista 2

✰ Derivadas parciais, gradiente e diferenciabilidade

1. Ache as derivadas parciais de primeira ordem das funções:

   (a) $f(x,y) = \arctan(y/x)$ (b) $f(x,y) = \ln(1+\cos^2(xy^3))$ (c) $f(x,y) = \dfrac{1-xy}{1+x^2+y^2}$

2. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:

   (a) $u(x,y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ (b) $u(x,y) = f(ax+by)$, onde a e b são constantes.

   (c) $u(x,y) = f(xy^2-2x)$ (d) $u(x,y) = f(e^{x^2+y^2})$

3. Dada a função $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}e^{\sin(x^2y)}$, ache $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$. (Neste caso, usar a definição de derivada parcial é menos trabalhoso do que aplicar as regras de derivação.)

4. Verifique que a função $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

5. Sejam $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deriváveis até 2a. ordem.

   (a) Mostre que $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

   (b) Mostre que $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ é solução da equação

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

6. Sejam $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$ e $g(x,y) = |xy|^{\frac{5}{4}}$. Mostre que f e g são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

7. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} + \sin(x+3y) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.

   (b) f é contínua em $(0,0)$?

   (c) f é diferenciável em $(0,0)$?

8. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que f é contínua em (0,0).

   (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   (c) f é diferenciável em $(0,0)$?

   (d) São $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em $(0,0)$?

9. Considere $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

   (b) As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$?

10. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sin\big((x^2+y^2)^2\big)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Verifique que f é contínua em $(0,0)$.

    (b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

    (c) A função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

    (d) A função f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

11. Seja $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Verifique que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ para todo y, e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, para todo x.

    (b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

12. Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde f é diferenciável, sendo:

    (a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$

    (b) $f(x,y) = x|y|$

    (c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^4+y^4}}$

    (d) $f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$

13. Mostre que não existe nenhuma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x,y) = (x^2y, y^2)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

14. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

    (a) $z = e^{x^2+y^2}$, no ponto $(0,0,1)$ (b) $z = \ln(2x+y)$, no ponto $(-1,3,0)$

    (c) $z = x^2 - y^2$, no ponto $(-3,-2,5)$. (d) $z = e^x \ln y$, no ponto $(3,1,0)$.

15. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0,1,5)$ e $(0,0,6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x,y) = x^3 y$.

16. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície $z = xf\left(\frac{x}{y}\right)$ passam pela origem.

17. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas $\gamma(t) = (2, t, 2t^2)$ e $\mu(t) = (2t^2, t, 2t^4)$ estejam contidas no gráfico de f. Determine o gradiente de f no ponto $(2,1)$.

18. O gradiente de $f(x,y) = x^2 + y^4$ é tangente à imagem da curva $\gamma(t) = (t^2, t),\ t > 0$ em um ponto P. Encontre a equação da reta tangente à curva de nível de f que contém P, no ponto P.

19. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

    (a) $f(x,y) = xe^{-y} + 3y$, $(1,0)$; (b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $(1,2)$;

20. Mostre que $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ é contínua em $(0,0)$ e tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$. É f diferenciável em $(0,0)$?

21. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t+1, -t^2),\ t \in \mathbb{R}$, é uma curva de nível de f. Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,-4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1,-4)$ e na direção e sentido do vetor $\vec{u} = (3,4)$.

22. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Calcule o gradiente de f no ponto $(0,0)$.

    (b) Mostre que $\frac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big) \neq \nabla f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$ em $t = 0$, onde $\gamma(t) = (-t,-t)$.

    (c) Seja $\vec{u} = (a,b)$ um vetor unitário (isto é, $a^2 + b^2 = 1$). Use a definição de derivada direcional para calcular $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$.

    (d) f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

23. Seja $a > 0$ e considere o plano tangente à superfície $xyz = a$ num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tem volume independente do ponto de tangência.

☆ **Regra da cadeia**

24. Calcule $\frac{\partial w}{\partial t}$ e $\frac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

(a) $w = x^2 + y^2; x = t^2 + u^2, y = 2tu.$

(b) $w = \dfrac{x}{x^2+y^2}; x = t\cos u, y = t\sin u.$

(c) $w = x^2 + y^2 + z; x = tu, y = t + u, z = t^2 + u^2.$

25. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Calcule g_u, g_v, em função de f_x, f_y nos seguintes casos:

(a) $g(u,v) = f(u^2, v^3)$ (b) $g(u,v) = \sin u - f(2u-3v^2, u-\cos v)$

(c) $g(u,v) = f(\sin(u+v), \cos(u-v))$ (d) $g(u,v) = f(e^{u^2}, \ln(u+v))$

26. Uma função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ é **homogênea de grau** λ se satisfaz $f(tx,ty) = t^\lambda f(x,y)$ para todos $t > 0$ e $(x,y) \neq (0,0)$, para um certo $\lambda \in \mathbb{R}$ fixo. Supondo que f é uma função de classe C^2 homogênea de grau λ, verifique que:

(a) $xf_x + yf_y = \lambda f$; (Relação de Euler)

(b) As funções f_x e f_y são homogêneas de grau $\lambda - 1$.

27. Verifique que as funções abaixo são homogêneas e determine o grau:

(a) $f(x,y) = 5x^2 + 2xy - y^2$ (b) $f(x,y) = \dfrac{xe^{\frac{x}{y}}}{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+y^3}}$ (c) $f(x,y) = \dfrac{xy\sin(y/x)}{x^4+y^4}$

28. O raio de um cilindro circular está decrescendo à taxa de 1,2cm/s enquanto sua altura está crescendo à taxa de 3cm/s. A que taxa o volume do cilindro está variando quando o raio vale 80 cm e a altura vale 150 cm?

29. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\nabla f(-2,-2) = (a,-4)$ e

$$g(t) = f(2t^3 - 4t, t^4 - 3t).$$

Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = 2x + 3$.

30. Seja $u = u(x,y)$ função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$ e defina $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\theta)$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta) = \Delta u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

onde, por definição, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

31. Seja $f = f(x,y)$ uma função de classe C^2 e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(u,v) = uf(u^2 - v, u + 2v)$.

(a) Determine $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ em função das derivadas parciais de f.

(b) Sabendo que $3x + 5y = z + 26$ é o plano tangente ao gráfico de f, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,4) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,4) = 1$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,4) = -1$, calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(-2,3)$.

32. Seja $F(r,s) = G(e^{rs}, r^3\cos(s))$, onde $G = G(x,y)$ é uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$.

   (a) Calcule $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,s)$ em função das derivadas parciais de G.

   (b) Determine $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(1,0)$ sabendo que $\dfrac{\partial G}{\partial y}(t^2+1, t+1) = t^2 - 2t + 3$.

33. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = \ln(x^2 + ky^2)$ no ponto $(2,1,f(2,1))$ seja perpendicular ao plano $3x + z = 0$.

34. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ e tal que $2x + y + z = 7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(0,2,f(0,2)\big)$. Seja

$$g(u,v) = u\,f\big(\operatorname{sen}(u^2 - v^3), 2u^2v\big).$$

   Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $\big(1,1,g(1,1)\big)$ seja paralelo ao vetor $(4,2,a)$.