UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM032 - Cálculo II - Matemática Diurno
Prof. Zeca Eidam

Lista 3

☆ Máximos e mínimos de funções de duas e três variáveis

1. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

(a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$ (b) $z = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$ (c) $z = x^2y^2$
(d) $z = x^4 + xy + y^2 - 6x - 5y$ (e) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ (f) $z = y\cos x$
(g) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$ (h) $z = y^4 + 4x^2y - 4x^2 - 8y^2$ (i) $z = xye^{-x^2-y^2}$
(j) $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$ (k) $z = (x-1)^3 + (y-2)^3 - 3x - 3y$ (l) $z = x^3y^3$
(m) $z = x^{-2} + y^{-1} + xy,\ x > 0,\ y > 0$ (n) $z = \sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$ (o) $z = x^4 + y^4 + x + y$

2. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D indicada.

(a) $f(x,y) = 5 - 3x + 4y$; D é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$

(b) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2,\ x \le 0,\ y \ge 0\}$

(c) $f(x,y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$

(d) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -3 \le x \le 3,\ -3 \le y \le 3\}$.

(e) $f(x,y) = (4x - x^2)\cos y$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 3,\ -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}\}$

3. Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f sujeita às restrições explicitadas:

(a) $f(x,y) = xy$; $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$

(b) $f(x,y,z) = xyz$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

(c) $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x^4 + y^4 + z^4 = 1$

4. Encontre o máximo e o mínimo absolutos de $f(x,y)$ em D sendo:

(a) $f(x,y) = xy$; $D = \left\{(x,y) : x^2 - y^2 = 1,\ x \in [1,2]\right\}$

(b) $f(x,y) = 2x^3 + y^4$; $D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1,\ x \in [0,1/4],\ y \ge 0\right\}$

5. Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0,0)$.

6. Qual o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ que está mais próximo do ponto $(1,1,1)$?

7. Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.

8. Determine o ponto do plano $x + 2y - z = 4$ mais próximo da origem.

9. Considere a função $f(x,y) = 1-x^2-y^2$ definida em $D = \{(x,y) : x > 0\,,\, y > 0\}$. Determine o plano tangente ao gráfico de f que forma com o planos coordenados o tetraedro de volume mínimo.

10. Determine a distância entre as retas de equação

    $X = (-2,3,-1) + \alpha(4,1,5)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X = (-1,0,3) + \mu(-2,3,1)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

11. Determine o ponto do plano $3x + 2y + z = 12$ cuja soma dos quadrados das distâncias a $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$ seja mínima.

12. Seja $f(x,y) = a(x^2 + y^2) - 2xy$, onde a é uma constante.

    (a) Verifique que, para todo $a \in \mathbb{R}$, o par $(0,0)$ é um ponto crítico de f.

    (b) Para cada valor de a, classifique o ponto crítico $(0,0)$ com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de a para os quais podemos afirmar que $(0,0)$ é extremo global (absoluto) de f?

13. Seja $b \neq 0$ e $f(x,y) = \dfrac{y^4}{4} + bx^2y - bx^2 - 2y^2$.

    (a) Determine, em função de b, o número de pontos críticos de f e classifique-os.

    (b) Faça $b = 3$ e ache os extremos de f no triângulo (fronteira e interior) de vértices $(0,0)$, $(3,3)$ e $(-3,3)$.

14. Determine o valor máximo e o valor mínimo de f em E sendo

    (a) $f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z$ e $E = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 56\}$

    (b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z + 3x$ e $E = \{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 4\}$

15. Encontre uma parametrização para C e use esta parametrização para encontrar, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em C, bem como os pontos onde estes valores são assumidos:

    (a) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$ e $f(x,y) = x^3y$.

    (b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \text{ e } z = 2y\}$ e $f(x,y,z) = x - z$.

    (c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$ e $f(x,y,z) = xz + y$.

    (d) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \text{ e } x - y + 3z = 3\}$ e $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

16. Qual é o ponto da superfície $z^2 = xy + 1$ que está mais próximo da origem?

17. A temperatura num ponto (x,y,z) do espaço é dada por $T(x,y,z) = xy + yz$. Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ onde a temperatura é mais alta e onde é mais baixa. Justifique.

18. Determine as dimensões de um paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, $z > 0$.

19. Um pentágono de 12 cm de perímetro é construído colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo. Dentre esses pentágonos, determine as medidas dos lados daquele que tem área máxima.

20. Determine a equação do plano que passa por $(2,2,1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.

21. Dentre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ encontre aqueles mais distantes da origem.

22. Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com $27cm^2$ de papelão.

✰ Desigualdade entre média aritmética e geométrica

23. Se $f_1, \ldots, f_n$ são funções positivas satisfazendo $f_1 + \ldots + f_n = k$, onde $k > 0$ é uma constante, então o valor máximo do produto $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$ é assumido se pudermos arranjar as funções $f_1, \ldots, f_n$ de forma que $f_1 = \ldots = f_n$.

24. Se $f_1, \ldots, f_n$ são funções positivas satisfazendo $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n = k$, onde $k > 0$ é uma constante, então o valor mínimo da soma $f_1 + \ldots + f_n$ é assumido se pudermos arranjar as funções $f_1, \ldots, f_n$ de forma que $f_1 = \ldots = f_n$.

25. Dados $a, b, c, k > 0$, determine os valores máximo do produto xyz para $x, y, z > 0$ satisfazendo a relação $ax + by + cz = k$.

26. Dado $k > 0$ qualquer, determine o valor máximo do produto x^2y para $x, y > 0$ satisfazendo a relação $x + y = k$.

27. Dados $k > 0$ qualquer e $m, n \in \mathbb{N}$, determine o valor máximo do produto $x^m y^n$ para $x, y > 0$ satisfazendo a relação $x + y = k$.

28. Dado $k > 0$, determine o valor máximo do produto x^3yz^2 para $x, y, z > 0$ satisfazendo a relação $x + 2y + 3z = k$.

29. Dados $k > 0$ qualquer e $m, n, p \in \mathbb{N}$, determine o valor máximo do produto $x^m y^n z^p$ para $x, y, z > 0$ satisfazendo a relação $x + y + z = k$.

30. Ache o valor mínimo da soma $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{y}$ para $x, y > 0$ satisfazendo $xy = 1$.

31. Dado $a > 0$, ache o valor mínimo da expressão $x(a - x^2)$ para $x > 0$.

32. Encontre o valor mínimo da soma $\dfrac{x}{y} + 2\dfrac{y}{z} + 8\sqrt{\dfrac{z}{x}}$ para $x, y, z > 0$.

33. Mostre que para todos $x, y, z > 0$ tem-se

$$\left(x + y + z\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9\,,$$

sendo este valor assumido para $x = y = z = 1$. Conclua que se a soma $x + y + z$ é constante igual a c, então

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{c}\,.$$