UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CMM032 - Cálculo II - Matemática Diurno
Prof. Zeca Eidam

Nosso objetivo nestas notas é provar alguns resultados de cálculo em duas variáveis.

1 Diferenciabilidade e derivadas direcionais

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e $(x_0, y_0) \in D$. As *derivadas parciais* de f em (x_0, y_0) são definidas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \doteq f_x(x_0, y_0) \doteq \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \doteq f_y(x_0, y_0) \doteq \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Na prática, é muito simples calcular as derivadas parciais de uma função. Basta observar que, fixado o ponto (x_0, y_0), podemos considerar a função de uma variável $t \mapsto f(t, y_0)$; a derivada parcial em relação a x em (x_0, y_0) é exatamente a derivada da função f em x_0. Da mesma maneira, a derivada da função $u \mapsto f(x_0, u)$ em y_0 coincide com a derivada parcial em relação a y em (x_0, y_0). Portanto, para calcular f_x podemos pensar y como constante e derivar a função de uma variável obtida e o mesmo vale com x em lugar de y.

Uma pergunta natural que surge é saber quão *forte* é conceito de derivada parcial, ou, dito de outra forma, saber que propriedades possui uma função que possui derivadas parciais. O exemplo abaixo mostra que a simples existência de derivadas parciais não garante muita coisa a respeito da função.

Exemplo 1 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

As derivadas parciais de f são

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad , \quad f_y(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2 x}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Embora f possua derivadas parciais em $(0, 0)$, é fácil ver que f sequer é contínua em $(0, 0)$, pois $\lim_{t \to 0} f(t, 0) = 0$ e $\lim_{t \to 0} f(t, t) = 1/2$.

O exemplo anterior mostra que, se desejarmos garantir algo melhor, como continuidade, por exemplo, devemos exigir algo mais que simplesmente a existência de derivadas parciais. Olhando um pouco mais de perto, observamos que as derivadas parciais de f não são contínuas, pois $\lim_{t \to 0} f_x(0, t) = \lim_{t \to 0} 1/t$, que não existe. Algo semelhante ocorre com f_y.

A existência de derivadas parciais de uma função $f : D \to \mathbb{R}$ em um ponto $(x_0, y_0) \in D$ nos permite construir um objeto geométrico muito importante associado a f: o *plano tangente*.

Olhando para a função $\varphi : t \mapsto f(t, y_0)$, podemos considerar a reta tangente ao gráfico de φ no ponto $(x_0, f(x_0, y_0))$ incluída de maneira natural no espaço tridimensional. Isso nos fornece a reta $r_x : (x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda(1, 0, f_x(x_0, y_0))$. Fazendo uma argumentação análoga com a função $u \mapsto f(x_0, u)$, obtemos a reta $r_y : (x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda(0, 1, f_y(x_0, y_0))$. Tais retas determinam um único plano que passa pelo ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e é normal ao vetor $\vec{n} \doteq (1, 0, f_x(x_0, y_0)) \times (0, 1, f_y(x_0, y_0)) = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1)$. A equação geral deste plano é

$$-f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - f(x_0, y_0)) = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Este último plano é chamado *plano tangente ao gráfico de f no ponto* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Assim como no cálculo em uma variável a reta tangente ao gráfico de uma função (diferenciável) em um ponto *aproxima* a função naquele ponto, alimentamos a esperança de que o *plano tangente ao gráfico de f em um ponto aproxime a função neste ponto.*

Porém, o mesmo exemplo (1) mostra que sem assumir nada mais, não se pode esperar nada: a função estudada no referido exemplo admite o plano $z = 0$ como plano tangente em $(0, 0, 0)$, mas sequer é contínua na origem, então, não podemos esperar uma boa aproximação de f através de seu plano tangente.

Analisemos o que ocorre em uma variável: se $\varphi = \varphi(t)$ é uma função diferenciável em $t = t_0$, então $\lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} = \varphi'(t_0)$, ou, equivalentemente,

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t) - \{\varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t - t_0)\}}{t - t_0} = 0. \tag{1}$$

A expressão que aparece entre chaves acima é exatamente a função afim $\varphi_1(t)$ cujo gráfico é a reta tangente em $(t_0, \varphi(t_0))$ e pode ser pensada como a *aproximação linear de φ em $t = t_0$*. O módulo do numerador da expressão (1), representa o *erro* cometido ao aproximarmos $\varphi(t)$ por $\varphi_1(t)$. Assim, (1) nos diz que φ é diferenciável em $t = t_0$ se e só se o erro cometido ao aproximarmos $\varphi(t)$ por $\varphi_1(t)$ tende a zero *mais rápido* que $t - t_0$. Esta idéia pode ser generalizada para uma função de duas variáveis.

Sejam, como antes, $D \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e $(x_0, y_0) \in D$. Vamos admitir que existam as derivadas parciais $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$, e portanto, fica bem definido o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. A função cujo gráfico é o plano tangente em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é

$$f_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

e f_1 também será pensada como aproximação linear de f em (x_0, y_0). A próxima definição segue a mesma idéia daquela dada para uma função de uma variável.

Definição 2 f é dita *diferenciável em* (x_0, y_0) se

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - \{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)\}}{|(x - x_0, y - y_0)|} = 0.$$

Escrevendo $(x - x_0, y - y_0) = (h, k)$, a igualdade acima é equivalente a

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - \{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k\}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

A função f é dita simplesmente *diferenciável* se o for em todos os pontos de seu domínio. Dizer que f é diferenciável em (x_0, y_0) é o mesmo que dizer que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\,,$$

onde $r(h,k) \doteq f(x_0+h, y_0+k) - \{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k\}$.

A primeira consequência do fato que uma função é diferenciável no ponto (x_0, y_0) é sua continuidade no ponto (x_0, y_0). De fato, se basta observar que,

$$r(h,k) = \frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\sqrt{h^2+k^2} \to 0\,,$$

quando $(h,k) \to (0,0)$. Em particular, $\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0)$.

Embora a definição acima tenha uma bela interpretação e um forte apelo geométrico, seria absolutamente desastroso termos que verificar que determinada função é diferenciável em um ponto usando somente a definição. Para ter idéia disso, o leitor é convidado a provar que a função do exemplo (1) é diferenciável em qualquer ponto $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ usando a definição.

Nosso próximo passo é encontrar uma condição simples envolvendo as derivadas parciais de uma função que nos permita concluir sobre a diferenciabilidade da função. Conforme observamos, no referido exemplo as derivadas parciais *não são contínuas em* $(0,0)$.

Teorema 3 Se as derivadas parciais de f são contínuas em (x_0, y_0) então f é diferenciável em (x_0, y_0).

Prova. Pelo teorema do valor médio para funções de uma variável, existem h_1, k_1 entre h e k, respectivamente, tais que

$$\begin{aligned}
r(h,k) &= f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k \\
&= \{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)\} + \{f(x_0, y_0+k) - f(x_0,y_0)\} - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k \\
&= f_x(x_0+h_1, y_0+k)h + f_y(x_0, y_0+k_1)k - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k \\
&= \{f_x(x_0+h_1, y_0+k) - f_x(x_0,y_0)\}\,h + \{f_y(x_0, y_0+k_1) - f_y(x_0,y_0)\}\,k\,.
\end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros da igualdade acima por $\sqrt{h^2+k^2}$ e usando o fato que f_x, f_y são contínuas, temos

$$\frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \{f_x(x_0+h_1, y_0+k) - f_x(x_0,y_0)\}\underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{limitada}} + \{f_y(x_0, y_0+k_1) - f_y(x_0,y_0)\}\underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{limitada}} \to 0$$

∎

O leitor poderia a esta altura estar intrigado em relação à escolha *especial* que fizemos das direções coordenadas nas definições de derivadas parciais. Dito de outra forma, podemos nos perguntar se existe algo de especial na escolha das direções coordenadas para tomarmos as derivadas parciais. Poderíamos definir diretamente a *derivada de f na direção de um vetor não-nulo $v = (a,b)$* como a derivada da função

$$t \mapsto f(x_0+at, y_0+bt)$$

em $t = 0$. Esta derivada é denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)$. Tomando $v = (1,0)$ e $v = (0,1)$, obtemos as derivadas parciais $f_x(x_0,y_0)$ e $f_y(x_0,y_0)$, respectivamente.

Para a função do exemplo (1), vemos que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ existe e é nula se v tem uma das coordenadas nula. Se ambas as coordenadas de v são não-nulas, então $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ não existe. Isso sugere que uma função com derivadas direcionais em todas as direções tenha um comportamento melhor do que uma função que simplesmente possui derivadas parciais.

Exemplo 4 Seja $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\,, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Vemos que g é contínua em $\mathbb{R}^2$ e se $v = (a,b) \neq (0,0)$ então $\dfrac{\partial g}{\partial v}(0,0) = \dfrac{a^2 b}{a^2+b^2}$. Mas g *não* é diferenciável na origem, pois

$$\frac{r(h,h)}{\sqrt{h^2+h^2}} = \frac{h}{2\sqrt{2}|h|}$$

e a última expressão não tem limite quando $h \to 0$.

Já que o exemplo anterior nos mostra que simplesmente possuir derivadas direcionais não é muita coisa, vamos agora verificar o que ocorrem com as derivadas direcionais no caso de uma função *diferenciável* no ponto (x_0, y_0). Mantendo a mesma notação, dado $v = (a,b)$ não-nulo e usando $(h,k) = (ta, tb)$, com $|t|$ pequeno, na definição (2), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+at, y_0+bt) - f(x_0,y_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f_x(x_0,y_0)(at) + f_y(x_0,y_0)(bt) + r(at,bt)}{t} \\ &= f_x(x_0,y_0)a + f_y(x_0,y_0)b + \lim_{t\to 0}\frac{r(at,bt)}{t} \\ &= f_x(x_0,y_0)a + f_y(x_0,y_0)b \\ &= \langle \nabla f(x_0,y_0), v\rangle\,, \end{aligned} \tag{2}$$

onde $\nabla f(x,y) \doteq (f_x(x,y), f_y(x,y))$ é o chamado *gradiente de* f *em* (x,y) e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$. Está provado o próximo resultado.

Proposição 5 Se f é diferenciável em (x_0,y_0), então as derivadas direcionais de f existem em qualquer direção $v \neq 0$ e

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = \langle \nabla f(x_0,y_0), v\rangle\,.$$

Decorre da proposição acima que a aplicação $df(x_0,y_0):\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$df(x_0,y_0)\cdot v \doteq \frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)$$

é *linear*. Esta aplicação é chamada de *derivada de* f *em* (x_0,y_0). A demonstração da proposição (5) e a definição de diferenciabilidade provam o corolário a seguir.

Corolário 6 Se f é diferenciável em (x_0, y_0) então

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)\cdot(h,k) + r(h,k),$$

onde $\dfrac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0$ quando $(h,k)\to(0,0)$.

Exemplo 7 Já sabemos que a função g do exemplo (4) *não* é diferenciável em $(0,0)$. Outra maneira de comprovar este fato é observar que, embora $\dfrac{\partial g}{\partial v}(0,0)$ exista para todo $v \in \mathbb{R}^2$ não-nulo, esta quantidade não depende *linearmente* de v.

Quando f é diferenciável em (x_0, y_0), a fórmula (2) contém uma informação importante a respeito da função f. Suponha que estejamos sobre o ponto (x_0, y_0), que $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$ e desejemos saber em qual das direções v a derivada direcional é máxima (i.e., em que direção f cresce mais). É claro que, se trocarmos v por λv, a derivada direcional será multiplicada pela mesma constante λ, então, para que o problema tenha sentido, vamos nos restringir a vetores v unitários. Como $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \left\langle \nabla f(x_0, y_0), v\right\rangle$, observamos que o maior valor para $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ será atingido quando v for um vetor unitário paralelo e com o mesmo sentido que $\nabla f(x_0, y_0)$, i.e., $v = \dfrac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|}$. Para este último v, temos

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0), \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|}\right\rangle = |\nabla f(x_0, y_0)|.$$

Proposição 8 Se f é diferenciável em $(x_0, y_0) \in D$ e $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$, então a derivada direcional máxima de f em (x_0, y_0) ocorre na direção do vetor gradiente em (x_0, y_0) e vale $|\nabla f(x_0, y_0)|$. Em outras palavras, o vetor gradiente aponta sempre na direção de maior crescimento de f.

2 Regra da cadeia

Considere uma curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to D$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, de classe C^1 tal que $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Vamos provar que a composição $f(x(t), y(t))$ é diferenciável em $t = 0$ e calcular o valor da derivada. Pelo teorema do valor médio para funções de uma variável, obtemos t_1, t_2 entre 0 e t tais que

$$\begin{aligned}\frac{f(x(t),y(t)) - f(x(0),y(0))}{t} &= \frac{f(x(t),y(t)) - f(x(0),y(t))}{t} + \frac{f(x(0),y(t)) - f(x(0),y(0))}{t} \\ &= f_x(x(t_1), y(t))x'(t_1) + f_y(x(0), y(t_2))y'(t_2).\end{aligned}$$

Fazendo $t \to 0$ na expressão acima e usando o fato que as funções envolvidas são de classe C^1, concluímos que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x(t), y(t)) = f_x(x_0, y_0)x'(0) + f_y(x_0, y_0)y'(0). \tag{3}$$

Para facilitar a lembrança, abolimos as variáveis na expressão acima e obtemos

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Outra situação de interesse é quando compomos uma função $f : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1 com uma aplicação $\Phi : E \to D$, $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, onde $E, D \subset \mathbb{R}^2$ são abertos, x, y são de classe C^1, e $\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$. Para obter $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)$, $g = f \circ \Phi$, usamos a relação (3):

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x(u_0+t,v_0), y(u_0+t,v_0)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0).\end{aligned}$$

Algo análogo vale para $\dfrac{\partial g}{\partial v}$; abolindo as variáveis para facilitar a lembrança, temos

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{4}$$

As fórmulas (3) e (4) são chamadas de *regra da cadeia*.

Admita que f seja diferenciável em todos os pontos de D e considere a curva de nível C_α de f no nível $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $(x_0, y_0) \in C_\alpha$, $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$ e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to C_\alpha$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, é uma parametrização diferenciável de C_α tal que $\gamma(0) = (x_0, y_0)$, então, derivando a igualdade $f(x(t), y(t)) = c$ em $t = 0$, obtemos, pela regra da cadeia,

$$\left\langle \nabla f(x_0,y_0), \gamma'(0)\right\rangle = 0.$$

Geometricamente, isto significa que $\nabla f(x_0, y_0)$ é ortogonal a C_α no ponto (x_0, y_0). Veremos mais adiante, com o auxílio do teorema da função implícita, que sempre existe uma parametrização local para C_α em torno de (x_0, y_0), desde que $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

3 Exercícios

Exercício 1 Suponha que o plano $\pi : 2x + 3y + 5z = 3$ seja tangente ao gráfico de uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, no ponto $(1, 2, f(1,2))$. Determine os valores abaixo:

1. $f(1,2)$;
2. $f_x(1,2)$ e $f_y(1,2)$;
3. $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,2)$ com $v = (2,3)$;
4. $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} f(3\sin t + 4t^2 + 1, e^{-6t} - 3t^7 + \cos t)$;
5. $\dfrac{\partial h}{\partial \theta}(\sqrt{5}, \arctan 2)$, onde $h(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$;
6. $g(1,2)$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,2)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,2)$, onde $g(x,y) = e^{f(x,y)^2-1} - 4\ln\left(1 + f(x,y)^2\right)$.

Exercício 2 Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e $(x_0, y_0) \in D$. Suponha que existam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - \left\{f(x_0,y_0) + \alpha h + \beta k\right\}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Mostre que f admite derivadas parciais em (x_0, y_0) e $\alpha = f_x(x_0, y_0)$, $\beta = f_y(x_0, y_0)$. Em particular, f é diferenciável em (x_0, y_0).

Exercício 3 Prove a recíproca do corolário (6), i.e., prove que se $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função e $\chi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é um funcional linear tal que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \chi(h, k) + r(h, k),$$

com $\dfrac{r(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0$ quando $(h, k) \to (0, 0)$ então f é diferenciável em (x_0, y_0) e $df(x_0, y_0) = \chi$.

Exercício 4 Determine (com justificativa) o conjunto dos pontos nos quais as funções abaixo são diferenciáveis:

(a) f é um polinômio em x, y
(b) f é uma função racional
(c) $f(x, y) = \sqrt[5]{5x^4 + 9x^2y^6 + 3y^2}$
(d) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$
(e) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
(f) $f(x, y) = |x + y|$

Exercício 5 Mostre que um funcional linear φ é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ e $d\varphi(x_0, y_0) = \varphi$.

Exercício 6 Mostre que $f(a) = |a|^5$ é diferenciável fora da origem e $df(a) \cdot v = 5|a|^3 \langle a, v \rangle$, para todos $a \neq 0$ e $v \in \mathbb{R}^2$. Generalize para $f(a) = |a|^r$, para qualquer $r \in \mathbb{R}$.

Exercício 7 Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y \varphi(t)\,dt$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e calcule a derivada de f em um ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 8 Se f é diferenciável em (x_0, y_0) e $df(x_0, y_0) \neq 0$, então existe pelo menos um vetor não-nulo $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = 0$. Interprete este resultado geometricamente.

Exercício 9 Admitindo que f seja uma função diferenciável, encontre uma fórmula para a derivada de $g(x, y) = f(x, y)^k$ em (x, y) em termos da derivada de f em (x, y).

Exercício 10 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $f(tx, ty) = tf(x, y)$ para todos $t > 0$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que f é uma função linear.

O que se pode dizer sobre a diferenciabilidade da função $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$, no ponto $(0, 0)$?

Exercício 11 Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável e $f(x/2, y/2) = f(x, y)/2$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ então f é linear.

Exercício 12 Seja $f : D \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(x_0, y_0) \in D$ e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to D$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ e $\gamma'(0) = v$. Prove que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t))$.

Exercício 13 (Desigualdade do valor médio) Seja $f : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1 em D tal que $|\nabla f(u)| \leq C$ para todo $u \in D$. Prove que $|f(p) - f(q)| \leq C|p - q|$ para todos $p, q \in D$.

Exercício 14 Seja $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ uma transformação linear e considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(u)=\langle Au,u\rangle$, $u\in\mathbb{R}^2$. Prove que f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e calcule a derivada de f em um ponto $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

Exercício 15 Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^1. Prove que $f(x_0,y_0)=0$ e $df(x_0,y_0)=0$ se e só se existem funções contínuas $a,b:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tais que $f(x,y)=a(x,y)x+b(x,y)y$, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Exercício 16 Define o *laplaciano de uma função* $f:D\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^2 por

$$\Delta f = f_{xx}+f_{yy}.$$

Uma função é dita *harmônica* quando $\Delta f=0$.

1. Prove que a função $f(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, $(x,y)\neq(0,0)$, é harmônica.

2. Uma função $f:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ é dita *radial* se existe $\varphi:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $f(x,y)=\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Mostre que uma função harmônica radial deve ser da forma $f(x,y)=\frac{A}{2}\ln(x^2+y^2)+B$, onde A,B são constantes reais.

3. Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ sua matriz em relação à base canônica. Determine $\Delta(f\circ T)$ e mostre que $\Delta(f\circ T)=(\Delta f)\circ T$ quando T é *ortogonal.*[1]

Exercício 17 Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^2.

1. Prove que $f_{xy}\equiv 0$ se e só se existem $\varphi,\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^2 tais que $f(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)$, para todos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

2. Considere a mudança de variáveis $x=\dfrac{u+v}{2}$ e $y=\dfrac{u-v}{2}$. Determine f_{xx} e f_{yy} em função de f_{uu}, f_{uv} e f_{vv}.

3. Usando a mudança de variáveis do ítem anterior, mostre que f satisfaz a *equação da onda*

$$f_{xx}=f_{yy}$$

   se e só se $f_{uv}=0$. Conclua, usando o ítem (a), que existem $\varphi,\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^2 tais que $f(x,y)=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Esta última igualdade é chamada de *Fórmula de d'Alembert.*

4. Dado $\alpha\in\mathbb{R}$ não-nulo, use a mudança de variáveis $x=\dfrac{u+v}{2}$ e $y=\dfrac{u-v}{2\alpha}$ e argumente como nos ítens anteriores para mostrar que se $f_{yy}=\alpha^2 f_{xx}$ então existem $\varphi,\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^2 tais que $f(x,y)=\varphi(x+\alpha y)+\psi(x-\alpha y)$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Exercício 18 Neste exercício, vamos encontrar uma forma *canônica* para um tipo especial de função.

1. Mostre que uma função $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^1 se anula na origem se e só se existe uma função contínua $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\varphi(t)=t\psi(t)$. (Dica: use o teorema fundamental do cálculo)

2. Seja $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $g(x,0)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Mostre que existe $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ contínua tal que $g(x,y)=xh(x,y)$, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

[1] Isto significa que o laplaciano é invariante por transformações ortogonais.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(x,0) = f(0,y) = 0$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que existe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua tal que $g(x,y) = xyF(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

4. À luz dos ítens anteriores, discuta a diferenciabilidade em $(0,0)$ das funções

$$f_{\alpha,\beta}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}\,, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad ,$$

para $\alpha, \beta > 0$.