UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM111 - Análise II
Prof. José Carlos Eidam

Lista 1

☆ Integração de Riemann

1. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Mostre que as afirmações abaixo são equivalentes:

   ① $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx = 0$.

   ② f se anula em $\{x \in [a,b] : f \text{ é contínua em } x\}$.

   ③ O conjunto $\{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}$ tem medida nula.

2. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são integráveis, mostre que fg é integrável e
$$\left(\int_a^b |f(x)g(x)|dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2 dx\right).$$
   A igualdade é verificada se e só se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o conjunto $\{x \in [a,b] : f(x) + \alpha g(x) = 0\}$ tem medida nula.

3. Mostre que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável então $\displaystyle\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f(x)^2 dx$.

4. Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua, mostre que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$. Em particular, $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ pode ser interpretada como um *média* de f no intervalo $[0,1]$.

5. Mostre que se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua e *positiva* então
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f(x)^n dx\right)^{1/n} = \sup_{0\leq x\leq 1} f(x).$$

6. (Conjunto de Cantor de medida positiva) Seja $0 < \delta < 1$ dado e escolhamos $a > 0$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = 1-\delta$.

   (a) Definamos uma família $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ de reuniões finitas de 2^n intervalos fechados de mesmo comprimento pondo $F_0 = [0,1]$. Assumindo construído F_n para um certo $n \geq 0$, construímos F_{n+1} retirando de cada intervalo fechado $I \subset F_n$ um intervalo aberto de comprimento $a^{n+1}/2^n$ com centro no ponto médio de I. Sendo assim, cada F_n é formado por 2^n intervalos e a soma de seus comprimentos é $1-(a+a^2+\ldots+a^n)$. Verifique estas afirmações.

   (b) Seja $C_\delta = \bigcap_{n\geq 1} F_n$. Mostre que $C_\delta \subset [0,1]$ é compacto e tem interior vazio.

(c) Se $\{J_m\}_{m\geq 1}$ é uma cobertura de C_δ por intervalos abertos, então, $\{I_j\}_{j\geq 1} \cup \{J_m\}_{m\geq 1}$ é uma cobertura de $[0,1]$ por intervalos abertos, onde os J_m são todos os intervalos retirados na construção de C_δ. Mostre que $\sum_{m\geq 1} |J_m| \geq \delta$, portanto, C_δ *não* tem medida nula. Os conjuntos C_δ são chamados de *conjuntos de Cantor de medida positiva.*

(d) Seja C_0 o conjunto de Cantor usual de medida nula (construído como acima, porém com a propriedade que a soma dos comprimentos dos intervalos retirados a cada etapa é $1 - (2/3)^n$). Dado $0 < \delta < 1$, encontre uma função contínua crescente $f : [0,1] \to [0,1]$ tal que $f(C_\delta) = C_0$.

(e) Denotando por χ_A a *função característica do subconjunto* A, a qual vale 1 em A e zero fora de A, mostre que a composição $\chi_{C_0} \circ f$ *não* é integrável. Isso mostra que a composta de uma função integrável e uma função contínua (monótona!) pode sequer ser integrável. Mas calma, veja os exercícios 8,9 e 10.

7. Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e uma partição $\mathscr{P} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ do intervalo $[a,b]$, a quantidade

$$\mathrm{V}(f;\mathscr{P}) \doteq \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|$$

é chamada de *variação de f em relação à partição* $\mathscr{P}$.

① Interprete geometricamente $\mathrm{V}(f,\mathscr{P})$.

② Mostre que se $\mathscr{P} \subset \mathscr{P}'$ então $\mathrm{V}(f,\mathscr{P}) \leq \mathrm{V}(f,\mathscr{P}')$.

③ O número $\mathrm{V}_a^b(f) \doteq \mathrm{V}(f) \doteq \sup\{\mathrm{V}(f,\mathscr{P}) : \mathscr{P}$ partição de $[a,b]\}$, quando é finito, é chamado de *variação total de* f *em* $[a,b]$ e f é dita de *variação limitada em* $[a,b]$. Mostre que o conjunto formado pelas funções de variação limitada é um subespaço vetorial do conjunto das funções reais definidas em $[a,b]$, o qual é denotado por $\mathrm{BV}([a,b])$. Mostre que toda função monótona é de variação limitada (a recíproca é falsa).

④ Mostre que o conjunto das $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 está contido em $\mathrm{BV}([a,b])$ e, neste caso,

$$\mathrm{V}_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|dx.$$

⑤ Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $\mathscr{P} : a = x_0 < x_< \ldots < x_n = b$ uma partição, definimos as variações *positiva* e *negativa* de f em relação à partição $\mathscr{P}$, respectivamente, por

$$\mathrm{V}(f,\mathscr{P})_+ \doteq \mathrm{V}_a^b(f,\mathscr{P})_+ \doteq \textstyle\sum_{f(x_j)>f(x_{j-1})} \big(f(x_j) - f(x_{j-1})\big)\,,$$

$$\mathrm{V}(f,\mathscr{P})_+ \doteq \mathrm{V}_a^b(f,\mathscr{P})_- \doteq \textstyle\sum_{f(x_j)<f(x_{j-1})} \big(f(x_{j-1}) - f(x_j)\big)\,.$$

Evidentemente, $\mathrm{V}(f,\mathscr{P}) = \mathrm{V}(f,\mathscr{P})_+ - \mathrm{V}(f,\mathscr{P})_-$. Definimos

$$\mathrm{V}(f)_* = \sup\{\mathrm{V}(f,\mathscr{P})_* : \mathscr{P} \text{ partição de } [a,b]\},$$

onde $*$ denota $+$ ou $-$. Mostre que $\mathrm{V}(f) = \mathrm{V}(f)_+ - \mathrm{V}(f)_-$.

⑥ Mostre que $f_1(x) \doteq \mathrm{V}_a^x(f)_+$ e $f_2(x) = \mathrm{V}_a^x(f)_-$ são não-decrescentes e $f(x) - f(a) = f_1(x) - f_2(x)$. Conclua que uma função é de variação limitada se e só se é diferença de duas funções monótonas.[1]

[1]Um teorema profundo de análise afirma que uma função de variação limitada (mais geralmente, uma função dita *absolutamente contínua*) possui derivada em todos os pontos, exceto possivelmente em um conjunto de medida nula.

⑦ Mostre que o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função monótona é enumerável e conclua que o mesmo se dá com o conjunto de pontos de descontinuidade de uma função de variação limitada. Em particular, toda função de variação limitada é integrável.

⑧ Mostre que $f(x) = x\sin(1/x)$, $0 < x \leq 1$, $f(0) = 0$ é uma função contínua (e portanto, integrável em $[0,1]$), mas não é de variação limitada. Isso mostra que nem toda função integrável é de variação limitada.

8. Mostre que se $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ é contínua e $g : [a,b] \to [c,d]$ integrável então $f \circ g$ é integrável.

9. Mostre que se $X \subset [a,b]$ tem medida nula e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ e de classe C^1 em (a,b) então $f(X)$ tem medida nula.

10. Seja $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ e de classe C^1 em (a,b), com $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$ e $g : [a,b] \to [c,d]$ integrável. Mostre que $g \circ f$ é integrável.

11. Mostre que o conjunto de Cantor tem medida nula.

12. (Teorema do valor médio para integrais) Mostre que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua então existe $c \in [a,b]$ tal que
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$
Encontre contraexemplos para a igualdade acima no caso em que f é descontínua.

13. (Segundo Teorema do valor médio para integrais) Mostre que se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são contínuas e g é não-negativa, então existe $c \in [a,b]$ tal que
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

14. Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são limitadas e integráveis, mostre que o produto fg é integrável.

15. Verifique se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2^{-n}$ se $x = j/2^n$ para algum j inteiro tal que $0 \leq j < 2^n$ e $f(x) = 0$ caso contrário é integrável em $[0,1]$.

16. Calcule:

    (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{j=1}^{n} j^p = (p+1)^{-1}$, para qualquer $p \neq -1$;

    (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sin(j\pi/n) = 2/\pi$;

    (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^{s-1}} + s\int_1^n \frac{[x]}{x^{s+1}}dx$, para qualquer $s \neq 1$, onde $[x]$ denota o maior inteiro menor ou igual a x.

17. Prove a *fórmula de Euler*: se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 (i.e., é contínua em $[a,b]$ e tem derivada primeira contínua em (a,b)), então
$$\sum_{a \leq n \leq b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \{x\}f'(x)dx + \{x\}f(x)\Big|_a^b,$$
onde $\{x\} \doteq x - [x]$ denota a parte não-inteira de x.