

Lista 1

☆ Números complexos

1. Efetue as operações indicadas abaixo:

(a) $(1+i)(1-i)$

(e) $\frac{(2-i)(2-5i)+(-1-i)}{3-2i}$

(i) $\frac{(3+i)^2(1-i)^3}{(-1+i)^2(1-i)^4}$

(b) $(3+2i)(5-i)(4-6i)$

(f) $\frac{1}{(1-i)(2+i)(-i)}$

(j) $(1+\sqrt{3}i)^{12}(1+i)^{13}$

(c) $((1+2i)-(3-i))(-2-i)$

(g) $(1-i)^6(2+i)^3$

(k) $\frac{1+2i}{1-2i} + \frac{1-i}{1+i}$

(d) $\frac{1-i}{1+i}$

(h) $\frac{1-i}{3-2i} + \frac{-2i}{7-i}$

(l) $\frac{(1+2i)^3(2-i)^2}{(-1-i)^3(1-i)^2}$

2. Prove que as afirmações abaixo são verdadeiras para todos $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $|z|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$

(o) $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

(b) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$

(p) $\operatorname{Re}(z \pm w) = \operatorname{Re} z \pm \operatorname{Re} w$

(c) $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

(q) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$

(d) $|z| = |\bar{z}|$

(r) $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$

(e) $||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$

(s) $\operatorname{Im}(z \pm w) = \operatorname{Im} z \pm \operatorname{Im} w$

(f) $|zw| = |z||w|$

(t) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

(g) $\operatorname{Re}(zw) = \operatorname{Re} z \operatorname{Re} w - \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w$

(u) $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

(h) $\operatorname{Im}(zw) = \operatorname{Re} z \operatorname{Im} w + \operatorname{Im} z \operatorname{Re} w$

(v) $|z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2\operatorname{Re} z \bar{w} + |w|^2$

(i) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

(w) $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2}|z|$

(j) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

(x) $|zw| \leq \frac{1}{2}(|z|^2 + |w|^2)$

(k) $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$

(y) $\operatorname{Re}(z^2) = (\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2$

(l) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

(z) $\operatorname{Im}(z^2) = 2\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z$

(m) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

(n) $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$

3. Mostre que se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$, então as igualdades abaixo são verdadeiras:

① $\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re} z$

② $\operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im} z$

Reciprocamente, prove as afirmações abaixo:

① Se $\operatorname{Re}(zw) = \operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}(w)$ então pelo menos um dos números z ou w é real.

② Se $\operatorname{Im}(zw) = \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(w)$ então $z \in \mathbb{R}$ ou $w = i\lambda$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, mostre que:

① $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2}$

② $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2}$

③ $\operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) - \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$

④ $\operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) + \operatorname{Im}(z) \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$

5. Mostre que não é possível introduzir uma ordem $\leq$ em $\mathbb{C}$ que seja *coerente* com a ordem usual de $\mathbb{R}$.

6. Mostre que para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, vale a fórmula do *binômio de Newton*:

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k},$$

onde $\binom{n}{k} \doteq \frac{n!}{k!(n-k)!}$, para $k = 0, 1, \dots, n$.

7. Calcule as potências indicadas abaixo:

(1) $(1 + i)^{75}$

(2) $(2 - 2i)^{17}$

(3) $(1 - i)^{16}$

(4) $(-1 + i)^{1977}$

(5) $(\sqrt{3} + i)^{2025}$

(6) $(-1 + \sqrt{3}i)^{2008}$

8. Mostre que as afirmações abaixo são todas equivalentes a respeito de um número $z \in \mathbb{C}$:

① $z \in \mathbb{R}$;

② $z = \operatorname{Re} z$;

③ $\operatorname{Im} z = 0$;

④ $|z| = |\operatorname{Re} z|$.

9. Verifique que, se $\omega \in \mathbb{C}$ é uma raiz n -ésima da unidade então

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$$

10. Dados $z, w \in \mathbb{C}$, mostre que:

① $\operatorname{Re}(z\overline{w}) = |z||w|$ se e só se $\arg(z) - \arg(w) = 2k\pi$ para algum inteiro k .

- ② $|z + w| = |z| + |w|$ se e só se $\arg(z) - \arg(w) = 2k\pi$ para algum inteiro k .
- ③ $|z - w| = ||z| - |w||$ se e só se $\arg(z) - \arg(w) = 2k\pi$ para algum inteiro k .

11. Aplicando a identidade

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

ao número $z = \cos \theta + i \sin \theta \in \mathbb{C}$, com $\theta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$, prove as identidades abaixo:

$$\textcircled{1} \quad 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta}{2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)}$$

$$\textcircled{2} \quad \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{1}{2} \cotg \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta}{2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)}$$

12. Fatore os polinômios abaixo em termos das suas raízes (reais ou complexas):

① $p(x) = x^2 + 1$

④ $p(x) = x^3 + 1$

② $p(x) = x^3 + x^2 + x$

⑤ $p(x) = x^4 + 1$

③ $p(x) = x^3 + x - 2$

⑥ $p(x) = x^4 + 4$

13. Determine todos os números $z \in \mathbb{C}$ tais que $z^n = w$ (raízes n -ésimas de w) para os valores abaixo de n e w :

① $n = 2, w = -1$

③ $n = 3, w = 2i$

② $n = 2, w = i$

④ $n = 3, w = 1 + i$

14. Faça um esboço gráfico das regiões abaixo descritas e as classifique em aberta/fechada, limitada/ilimitada, conexa/desconexa:

① $D = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1\}$

⑤ $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z \leq \pi/6\}$

② $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 1\}$

⑥ $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) > 0\}$

③ $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \leq 3\}$

⑦ $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) \leq 1\}$

④ $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3 + i| < 2\}$

⑧ $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| > |z|\}$