UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM044 - Cálculo IV - 2025/1
Prof. Zeca Eidam

Lista 2

✰ Funções complexas

1. Determine a parte real e a parte imaginária de cada uma das funções abaixo:

   ① $f(z) = z^2$

   ② $f(z) = z^2\overline{z} - 1$

   ③ $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$

   ④ $f(z) = (\overline{z-i})^3$

   ⑤ $f(z) = \dfrac{z}{z-1} + \dfrac{1}{z}$

   ⑥ $f(z) = (z-1)\overline{(z+2)}$

2. Determine os limites abaixo, se existirem:

   (a) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{|z|}{z}$

   (b) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{z}{\overline{z}}$

   (c) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{\overline{z}}$

   (d) $\displaystyle\lim_{z\to 1} \frac{z^2-1}{z-1}$

   (e) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen}(|z|)}{z}$

   (f) $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{z^2-(i+1)z+i}{z^2+1}$

   (g) $\displaystyle\lim_{z\to \infty} \frac{3z^2+1-\cos(|z|)}{2z^2-\ln(1+|z|)}$

   (h) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{1-z}{\overline{z}}$

   (i) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{|z|}$

   (j) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$

   (k) $\displaystyle\lim_{z\to \infty} \frac{2z^5-3z^4-2z+1}{z^3+z^2-1}$

   (l) $\displaystyle\lim_{z\to \infty} \frac{4z^3+2z^4+5}{z^4-z^2-3}$

3. Mostre que as funções abaixo não são diferenciáveis (no sentido complexo) em nenhum ponto:

   ① $f(z) = \overline{z}$

   ② $f(z) = \operatorname{Re} z$

   ③ $f(z) = \operatorname{Im} z$

4. Determine as expressões para as derivadas das funções abaixo em todos os pontos de seu domínio:

   ① $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$

   ② $f(z) = 3z^2 - 2z - 1$

   ③ $f(z) = \dfrac{z^2+z-1}{1+z^2}$

   ④ $f(z) = \dfrac{2z^3-3z+2}{z^2+1}$

5. Mostre que a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \sqrt{|x||y|}$, $z = x + iy$, satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em $z = 0$ mas *não* é diferenciável (no sentido complexo) neste ponto.

6. Verifique se as funções a seguir possuem derivada *no sentido complexo* nos pontos de seu domínio. Determine o valor da derivada, quando existir:

   ① $f(z) = \overline{z}$

   ② $f(z) = z - \overline{z}$

   ③ $f(z) = 2x + ixy^2$, $z = x + iy$

   ④ $f(z) = x + 2y + ixy^2$, $z = x + iy$

   ⑤ $f(z) = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$, $z = x + iy$

   ⑥ $f(z) = x^2 + iy^2$, $z = x + iy$

   ⑦ $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$

   ⑧ $f(z) = \dfrac{1}{z^n}$

   ⑨ $f(z) = z \operatorname{Im} z$

7. Consideremos a função
$$f(z) = z^{1/2},$$
definida como $f(z) = r^{1/2}(\cos(\theta/2) + i\operatorname{sen}(\theta/2))$ para todo $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, no domínio $D = \{z \in \mathbb{C} : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$. Mostre que f possui derivada em todos os pontos de D e
$$f'(z) = \frac{1}{2f(z)}.$$

8. Seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função analítica, com D conexo. Prove as seguinte afirmações:

   ① Se $\operatorname{Re} f$ é constante então f é constante.

   ② Se $\operatorname{Im} f$ é constante então f é constante.

   ③ Se $|f|$ é constante então f é constante.

   ④ Se $\overline{f}$ é analítica então f é constante.

   ⑤ Se $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$ então f é constante.

9. Seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função analítica e $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Mostre que
$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0).$$

✰ Funções harmônicas

10. Uma função $\varphi : D \to \mathbb{R}$ é de *classe* C^2 se existirem e forem contínuas em D as derivadas parciais de φ até segunda ordem, i.e., se existirem e forem contínuas em D as funções φ_x, φ_y e $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$. Uma tal função é dita *harmônica* em D se satisfizer a equação de Laplace
$$\Delta\varphi \doteq \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0.$$
Mostre que se f é uma função analítica em D então as partes real e imaginária de f são funções harmônicas em D.

11. Dadas duas funções harmônicas $u, v : D \to \mathbb{R}$, dizemos que estas são *conjugadas* se existir uma $f : D \to \mathbb{C}$ analítica (complexa) tal que $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$. Mostre que as funções abaixo são harmônicas e encontre uma conjugada harmônica para cada uma:

① $u(x,y) = 2x(1-y)$

② $u(x,y) = 2x - x^3 - 3xy^2$

③ $u(x,y) = \sinh x \,\mathrm{sen}\, y$

④ $u(x,y) = \mathrm{sen}\, x \cosh y$

⑤ $u(x,y) = x^2 - y^2 - x$

⑥ $u(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$

12. Mostre que se u, v são conjugadas harmônicas, então $(-v,u)$, $(-u,v)$ e (v,u) são pares de funções conjugadas harmônicas. Mostre também que $v+c$ é conjugada harmônica de u, para qualquer constante $c \in \mathbb{C}$.

13. Determine uma conjugada harmônica v para a função $u(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, $(x,y) \neq (0,0)$ no *maior domínio possível* D. É possível construir v em todo o domínio $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$?

14. Mostre que se $u : D \to \mathbb{C}$ é uma função harmônica e D é um retângulo ou um disco, então é possível construir uma conjugada harmônica $v : D \to \mathbb{C}$ para u. Constraste este resultado com o exercício anterior. Existem outros tipos de domínio D nos quais o resultado continua verdadeiro?

15. Consideremos em $\mathbb{R}^2$ o sistema usual de coordenadas polares (r,θ) dado por

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Assim, uma função $u = u(x,y)$ pode ser pensada também como função das variáveis (r,θ) por meio da expressão $u = u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

① Usando a regra da cadeia, mostre que $u_r = u_x \cos\theta + u_y \mathrm{sen}\,\theta$ e $u_\theta = -r\,u_x \mathrm{sen}\,\theta + r\,u_y \cos\theta$.

② Derive novamente as expressões obtidas no item anterior e conclua que

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r + u_{rr}\,.$$

③ Use o item anterior para mostrar que se u é uma função harmônica *radial*, i.e., que só depende da variável r, então existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$u(x,y) = a\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + b\,.$$

16. Sejam u, v são conjugadas harmônicas. Mostre que as curvas de nível de u e v se intersectam *ortogonalmente* nos pontos onde $f = u + i\,v$ tem derivada não nula.

17. Verifique o fato descrito no ítem anterior para $u = \mathrm{Re}\, f$ e $v = \mathrm{Im}\, f$ nos seguintes casos:

① $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$

② $f(z) = z^2$

③ $f(z) = \dfrac{1}{z}$