

Lista 4

☆ Função logaritmo

1. Determine os valores de:

① $\log 1$

② $\log(-2)$

③ $\log i$

④ $\log(-i)$

⑤ $\log((-1)^{1/3})$

⑥ $\log(1+i)$

⑦ $\log(ei)$

⑧ $\log(\sqrt{3}+i)$

⑨ $\log(\sqrt{3}-i)$

⑩ $\log(1-i)$

2. Determine os valores de:

① e^i

② 2^i

③ $(1-i)^{5i}$

④ $(1+i)^{2i+3}$

⑤ i^{-4i}

⑥ 2^{1+i}

⑦ $(-1)^{\sqrt{2}}$

⑧ $(-1)^{1/\pi}$

3. Sejam $a, b, z \in \mathbb{C}$, com $z \neq 0$. Considerando os valores principais das potências envolvidas, mostre as igualdades abaixo:

① $z^{a+b} = z^a \cdot z^b$

② $\frac{1}{z^a} = z^{-a}$

③ $\frac{z^a}{z^b} = z^{a-b}$

④ $(z^a)^b = z^{ab}$

4. Calcule a derivada das funções abaixo:

① $f(z) = \frac{2^z - \operatorname{sen} z}{\cos(z^2) + \sinh z}$

② $f(z) = e^{-z^2 + \cos z} \tanh z$

③ $f(z) = z^z$

④ $f(z) = \log\left(\frac{1+z^z}{1-z^2}\right)$

⑤ $f(z) = z^{\operatorname{sen} z} - (\operatorname{sen} z)^z$

⑥ $f(z) = \frac{z^2 - e^{2z}}{\operatorname{sech} z + \pi}$

☆ **Funções trigonométricas inversas**

5. Mostre que as funções multivalentes abaixo verificam as identidades indicadas:

① $\arcsin z = -i \log(iz + (1 - z^2)^{1/2})$

② $\arccos z = -i \log(z + (z^2 - 1)^{1/2})$

③ $\arctan z = \frac{1}{2} \log\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$

6. Use as expressões do exercício (5) para resolver as equações abaixo:

① $\cos z = 3$

② $\sen z = i$

③ $\tg z = 2$

7. Encontre expressões explícitas (como no exercício anterior) para as funções multivalentes a seguir:

① $f(z) = \operatorname{arcsec} z$

② $f(z) = \operatorname{arccotg} z$

③ $f(z) = \operatorname{arccosec} z$

8. Determine as derivadas das funções definidas nos exercícios (5) e (7).

9. Determine os valores de:

① $\arctan(2i)$

② $\arctan(1+i)$

③ $\operatorname{arctanh}(i)$

④ $\operatorname{arccosh}(-1)$

⑤ $\operatorname{arctanh}(0)$

10. Determine expressões explícitas (como as do exercício (5)) para as funções trigonométricas hiperbólicas inversas abaixo:

① $f(z) = \operatorname{arcsinh} z$

② $f(z) = \operatorname{arccosh} z$

③ $f(z) = \operatorname{arctanh} z$

④ $f(z) = \operatorname{arcsech} z$

⑤ $f(z) = \operatorname{arccoth} z$

⑥ $f(z) = \operatorname{arccosech} z$