UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM044 - Cálculo IV - 2025/1
Prof. Zeca Eidam

Lista 5

✩ Integrais de linha de funções complexas

1. Determine o valor de $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ em cada um dos casos abaixo:

   (a) $f(z) = z^2 + 1$ e γ é o segmento de reta que une 0 e $1 + i$

   (b) $f(z) = z^2 + 1$ e γ é a reunião dos segmentos de reta unindo 0, 1 e 1, $1 + i$

   (c) $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$ e γ é o círculo de centro na origem e raio 3 orientado no sentido anti-horário.

   (d) $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$ e γ é a porção do círculo de centro na origem e raio 1 contida no semiplano superior, orientada no sentido anti-horário.

   (e) $f(z) = e^z$ e γ é o segmento de reta unindo πi e 1.

   (f) $f(z) = e^z$ e γ é a fronteira do quadrado $[-1,1] \times [-1,1]$ orientada no sentido horário.

   (g) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ e γ é qualquer curva que não passa pela origem e une os pontos z_1 e z_2 (ambos não nulos)

   (h) $f(z) = z\,\mathrm{sen}\,(z^2)$ e γ é a curva $\gamma(t) = (1 + t^2) + (e^t i)$, $0 \le t \le 1$

   (i) $f(z) = e^{z+2}$ onde γ é o semicírculo $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \le t \le \pi$

   (j) $f(z) = z^4 + 3z^3 - z + \mathrm{sen}\,z$ onde γ é a curva $\gamma(t) = \cos(t^2) + i(\mathrm{sen}\,(t^2) + 1)$, $0 \le t \le 1$

2. Se γ_R é a porção do círculo $|z| = R$ contida no semiplano superior, orientada no sentido horário, mostre que
$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{Log}\,z}{z^2}\,dz\right| < 2\pi\left(\frac{2\pi + \ln R}{R}\right).$$
Em particular, $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{Log}\,z}{z^2}\,dz\right| = 0$.

3. Use o Teorema de Cauchy-Goursat para mostrar que as integrais abaixo são nulas (em todos os itens, γ é a circunferência de centro na origem e raio 1 orientada no sentido anti-horário):

4. $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{z-5}\,dz$

5. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{sen}\,z - e^{z^2}}{z^2+3}\,dz$

6. $\displaystyle\int_\gamma z\cosh(z^2+1)\,dz$

7. $\displaystyle\int_\gamma \frac{5z^3 + z + 2}{z^2 - 4}\,dz$

8. Se γ é uma curva orientada no sentido anti-horário que delimita uma região que contém em seu interior a origem, mostre que $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$.