UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM044 - Cálculo IV - 2025/1
Prof. Zeca Eidam

Lista 6

✰ Fórmula integral de Cauchy

1. Seja γ uma parametrização positivamente orientada do círculo $|z| = 3$ e suponhamos que

$$f(z) = \int_\gamma \frac{2w^3 - 4w - 1}{w - z}\,dw$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| \neq 3$. Determine os valores de $f(2)$ e $f(z)$ para $z \in \mathbb{C}$ com $|z| > 3$.

2. Seja D uma região em $\mathbb{C}$ cuja fronteira é parametrizada pela curva simples γ, orientada no sentido anti-horário e consideremos a função g

$$g(z) = \int_\gamma \frac{w^3 + 3w - 1}{w - z}\,dw$$

definida em todo $\mathbb{C}$, exceto sobre os pontos da fronteira de D.

① Mostre que $g(z) = 0$ se $w \notin D$.

② Mostre que $g(z) = 6\pi i z$ se z pertence ao interior da região D.

3. Determine $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 4z + 3}$ para as seguintes curvas γ:

① γ é a circunferência $|z| = 4$ orientada no sentido horário.

② γ é a circunferência $|z| = 2$ orientada no sentido anti-horário.

③ γ é a circunferência $|z - 4| = 2$ orientada no sentido anti-horário.

4. Determine $\displaystyle\int_\gamma \frac{(4z+1)\,dz}{(z^2 + 25)(z^2 - 4z + 3)}$ para as seguintes curvas γ:

① γ é a circunferência $|z| = 4$ orientada no sentido horário.

② γ é a circunferência $|z| = 2$ orientada no sentido anti-horário.

③ γ é a circunferência $|z - 4| = 2$ orientada no sentido anti-horário.

5. Seja γ a parametrização da fronteira do quadrado Q cujos lados estão sobre as retas $\operatorname{Re} z = \pm 2$ e $\operatorname{Im} z = \pm 2$ orientado no sentido anti-horário. Calcule as integrais a seguir:

① $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z-\pi i/2}\,dz$

② $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\,dz$

③ $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{2z+1}\,dz$

④ $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{tg}(z/2)}{(z-i)^2}\,dz$

⑤ $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sinh z}{z^4}\,dz$

⑥ $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z^n}\,dz,\ n\in\mathbb{N}$

6. Calcule as seguintes integrais de linha:

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-\pi/2)^2}\,dz$ onde γ é a circunferência $|z|=2$ orientado no sentido anti-horário

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z-2)}\,dz$ onde γ é a circunferência $|z|=3$ orientado no sentido anti-horário

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^n}{(z-a)^{n+1}}\,dz$ onde γ é a circunferência $|z|=2$ orientado no sentido anti-horário

(d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+1}{(z-2)^3}\,dz$ onde γ é a circunferência $|z-2|=1$ orientado no sentido anti-horário

(e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{2z^3+z^2+4}{z^4+4z}\,dz$ onde γ é a circunferência $|z-2|=4$ orientado no sentido anti-horário

(f) $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{Re}(z^2)\,dz$ onde γ é a fronteira do triângulo de vértices 0, 2 e $2+i$ orientada no sentido anti-horário

(g) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^2-1}\,dz$ onde γ é a curva obtida a partir da reunião das circunferências de raio 1 e centro nos pontos $z=1$ e $z=-1$, sendo a primeira delas percorrida no sentido anti-horário e a segunda percorrida no sentido horário.

(h) $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{Re}(z)\,dz$ onde γ é a semi-circunferência superior de raio 1 e centro na origem, orientada no sentido de 1 para -1

(i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+4}$ onde γ é a elipse de equação $x^2+4(y-2)^2=4$ orientada no sentido anti-horário.

(j) $\displaystyle\int_\gamma \frac{2-\operatorname{sen} z}{z^2-z}$ onde γ é a fronteira do retângulo de vértices nos pontos $2+2i$, $-2+2i$, $-2-2i$ e $2-2i$ orientada no sentido anti-horário.

(k) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z^3}$ onde γ é a fronteira do quadrado delimitado pelas retas $\operatorname{Re} z=\pm 1$ e $\operatorname{Im} z=\pm 1$ orientada no sentido anti-horário.

(l) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^3+\operatorname{sen} z}{(z-i)^3}$ onde γ é a fronteira do triângulo de vértices nos pontos ± 2 e $2i$, orientada no sentido anti-horário.

(m) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z(z-2i)^2}$ onde γ é a fronteira do quadrado de vértices nos pontos ± 3, $\pm 3i$, orientada no sentido anti-horário.

7. Dado $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$, mostre que $\displaystyle\int_\gamma z^n dz = 0$, onde γ é uma curva fechada qualquer que não passa pela origem.

8. Seja γ a circunferência $|z-i| = 2$ orientada no sentido anti-horário. Determine:

   ① $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+4} dz$ ② $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+4)^2} dz$

9. Seja γ a circunferência $|z| = 2$ orientada no sentido anti-horário. Determine $\displaystyle\int_\gamma f(z) dz$ nos seguintes casos:

   ① $f(z) = \dfrac{5}{z^{1975}} + \dfrac{2008}{z^{1977}} - \dfrac{16}{z-1/2} + z^{2013}$ ③ $f(z) = \dfrac{3z+5}{z^2+z}$

   ② $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{|z|}$ ④ $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+z}$

10. Calcule:

    ① $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{\overline{z}}{|z|} dz$ onde γ_R é a circunferência de centro na origem e raio $R > 0$ orientada positivamente.

    ② $\displaystyle\int_\gamma \frac{\overline{z}}{z} dz$ onde γ é a reunião das semi-circunferências superiores de centro na origem e raios $R_2 > 0$ e $R_1 > R_2$ com os segmentos de reta unindo os pontos $-R_1, -R_2$ e R_2, R_1, orientada no sentido anti-horário.

11. Dados números reais $a, b > 0$, considere a *elipse* de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

    ① Encontre uma parametrização γ desta curva no sentido anti-horário.

    ② Calculando a integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$, mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{2\pi}{ab}\,.$$

12. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{Im}(z^2) dz$ nos seguintes casos:

    ① γ é o segmento de reta unindo 0 a $2+4i$;

    ② γ é a parábola $y = x^2$ entre os pontos 0 e $2+4i$.

    O que podemos concluir sobre a função $f(z) = \operatorname{Im}(z^2)$?

13. Sejam D uma região fechada em $\mathbb{C}$ cuja fronteira é parametrizada pela curva simples γ, orientada no sentido anti-horário e f uma função analítica definida em um aberto contendo D

① Se $w \notin D$, mostre que $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}dz = 0$.

② Se w não pertence à fronteira de D então $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{z-w}dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^2}dz$.

③ Generalize a fórmula acima, obtendo $\displaystyle\int_\gamma \frac{f^{(n)}(z)}{z-w}dz = n!\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^n}dz$.

14. Seja γ uma curva fechada simples, D a região fechada delimitada por γ e z_1, z_2 pontos distintos no interior de D.

① Dada qualquer f analítica num aberto contendo D, mostre que

$$f(z_1) = f(z_2) + \frac{z_1 - z_2}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz.$$

② Usando a identidade do item anterior, é possível construir uma prova do teorema de Liouville, nas seguintes linhas.

Dada $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que $|f(z)| \leq M$, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| \leq R$, tomando $z_1 = z$, $z_0 = 0$ e $\gamma = \gamma_{R'}$ a circunferência de centro na origem e raio $R' > R$ orientada no sentido anti-horário, tem-se

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{2\pi i}\int_{\gamma_{R'}} \frac{f(w)}{(w-z)w}dw,$$

portanto,

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(0)| &= \left|\frac{z}{2\pi i}\int_{\gamma_{R'}} \frac{f(w)}{(w-z)w}dw\right| \\
&\leq \frac{|z|}{2\pi}\int_{\gamma_{R'}} \frac{|f(w)|}{|w-z||w|}|dw| \\
&\leq \frac{R}{2\pi}\int_{\gamma_{R'}} \frac{M}{(R'-R)\cdot R'}|dw| \\
&= \frac{R}{2\pi}\cdot\frac{M}{(R'-R)\cdot R'}\cdot(2\pi R') = M\frac{R}{R'-R} \to 0, \text{ se } R' \to 0.
\end{aligned}$$

15. Sejam $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\pi,\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$ e $f(z) = \operatorname{sen} z$. Determine o valor máximo de $|f|$ em D e o(s) ponto(s) onde este valor é assumido.

16. Se D é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{C}$, determine em que pontos de D a função $|f|$ assume seu valor máximo, onde $f(z) = e^z$.

17. Determine os pontos de máximo e mínimo para $|f|$ em D, onde $f(z) = (z+1)^2$ e D é o triângulo com vértices nos pontos $z = 0$, $z = 2$ e $z = i$.

18. (Teorema do módulo máximo para funções harmônicas) Seja $u : U \to \mathbb{R}$ uma função harmônica em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Mostre que se $(x_0, y_0) \in U$ é tal que $u(x_0, y_0) \geq u(x, y)$ para todo $(x, y) \in U$ então u é constante. (Dica: se v é uma conjugada harmônica para u, aplique o teorema do módulo máximo à função analítica e^f, onde $f = u + iv$.)

19. Neste exercício, vamos enunciar um resultado análogo o teorema do módulo máximo para pontos de mínimo de uma função analítica.

① Mostre que se $f(z) = z$, $z \in D$, com D o disco unitário, então $|f(0)| = 0 \leq |f(z)|$ para todo $z \in D$. Isso mostra que os pontos de mínimo de $|f|$ em D podem ser interiores a D sem que necessariamente f seja constante.

② Seja f uma função analítica em um aberto contendo o conjunto fechado e limitado D e suponhamos que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D$. Mostre que os pontos de mínimo de $|f|$ pertencem à fronteira de D.