

UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM044 - Cálculo IV
Prof. José Carlos Eidam

PRIMEIRA PROVA - 15/04/2025

GABARITO

Nome: _____

GRR _____

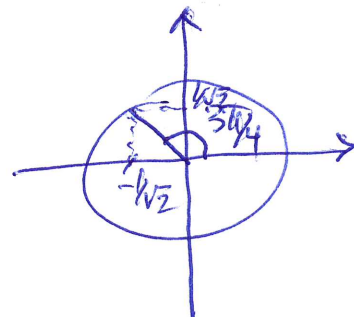
INFORMAÇÕES IMPORTANTES

1. A prova tem 5 questões.
2. Você pode usar todos os resultados demonstrados em aula.
3. Justifique suas respostas.
4. Boa prova!

Questão 1 (20 pontos) Calcule

$$W = (-1-i)^{2026} + (-1+i)^{2026}.$$

TEMOS QUE $W = (-1-i)^{2026} + (-1+i)^{2026}$
 $= (-1-i)^{2026} + \overline{(-1-i)^{2026}}$
 $= (-1-i)^{2026} + \overline{(-1-i)^{2026}}$
 $= 2 \operatorname{Re} (-1-i)^{2026}$



MAS $(-1-i) = \sqrt{2} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-i}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$

$\therefore$ PELA FÓRMULA DE DE MOIVRE,

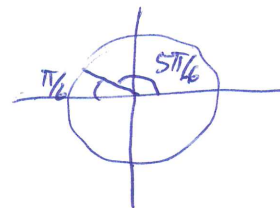
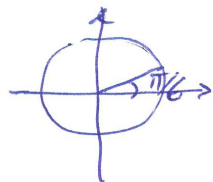
$$(-1-i)^{2026} = \sqrt{2}^{2026} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \cdot 2026 \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \cdot 2026 \right) \right) = \textcircled{A}$$

COMO $\frac{3\pi}{4} \cdot 2026 = \underbrace{1518\pi + \frac{3\pi}{2}}_{=2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$, SEQUE QUE

$$\textcircled{A} = 2^{1013} \left(\underbrace{\cos \frac{3\pi}{2}}_{=0} + i \underbrace{\sin \frac{3\pi}{2}}_{=-1} \right) = -2^{1013} i$$

$\therefore \operatorname{Re} (-1-i)^{2026} = 0 \quad \therefore W = 0.$

Questão 2 (20 pontos) Determine todos os números $z \in \mathbb{C}$ tais que $z^3 = 8i$.



$$z^3 = 8i = 8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

AS RAÍZES CÚBICAS DE $w = 8i$ SÃO

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi/2}{3} + i \sin \frac{\pi/2}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \sqrt{3} + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi/2 + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi/2 + 2\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left(-\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \\ &= -\sqrt{3} + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi/2 + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi/2 + 4\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \\ &= -2i \end{aligned}$$

AS RAÍZES CÚBICAS DE $w = 8i$ SÃO

$$z_1 = \sqrt{3} + i,$$

$$z_2 = -\sqrt{3} + i$$

...

Questão 3 (20 pontos) Dentre as funções abaixo, somente uma é diferenciável (no sentido complexo) em todos os pontos de seu domínio. Qual delas? Justifique sua resposta.

① $f_1(z) = z^3 \bar{z}^2 + \operatorname{Re} z$

② $f_2(z) = \frac{2z+3}{z^2-1}$

③ $f_3(z) = \arctan(e^{y-5} + 4\operatorname{sen} y) + i(e^{3x^2y+1} + 4x^5y^6), z = x + iy$

① f_1 NÃO É DIFERENCIÁVEL: VIMOS QUE UMA FUNÇÃO f DE CLASSE C^1 É DIFERENCIÁVEL NO SENTIDO COMPLEXO SE E SÓ SE $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

MAS $\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(z^3 \bar{z}^2 + \frac{z+\bar{z}}{2} \right) = 2z^3 \bar{z} + \frac{1}{2} \neq 0$,

ASSIM, f_1 NÃO É DIFERENCIÁVEL EM $\mathbb{C}$.

③ $f_2(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, com

$u(x,y) = \arctan(e^{y-5} + 4\operatorname{sen} y)$, $v(x,y) = e^{3x^2y+1} + 4x^5y^6$.

COMO $u_x = 0$ E $v_y = e^{3x^2y+1} + 3x^2 + 24x^5y^5 \neq 0$,

f_2 NÃO PODE SER DIFERENCIÁVEL EM $\mathbb{C}$, POIS NÃO SATISFAZ AS EQS. DE CAUCHY-RIEMANN.

② $f_2(z) = \frac{2z+3}{z^2-1}$ É QUOCIENTE DE FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS (POLINÔMIOS) $\therefore$ É DIFERENCIÁVEL EM TODO O SEU DOMÍNIO. //

Questão 4 Considere a função $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(x, y) = x^3 + 2x - 3xy^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) (20 pontos) Mostre que a função u é harmônica e determine uma conjugada harmônica v para a função u .

$$u_x = 3x^2 + 2 - 3y^2$$

$$u_y = -6xy$$

$$u_{xx} = 6x$$

$$u_{yy} = -6x$$

$$\therefore \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 6x - 6x = 0$$

Logo, $u \in \text{HARMÔNICA}$.

CONJUGADA HARMÔNICA (v)

$$\begin{cases} v_x = -u_y = 6xy \\ v_y = u_x = 3x^2 + 2 - 3y^2 \end{cases}$$

$$v_x = 6xy \Rightarrow v = 3x^2y + \phi(y)$$

$$v_y = 3x^2 + \phi'(y) = 3x^2 + 2 - 3y^2$$

$$\therefore \phi'(y) = 2 - 3y^2 \Rightarrow \phi(y) = 2y - y^3 + C$$

$$\therefore \underline{v(x, y) = 3x^2y + 2y - y^3 + C}$$

(b) (20 pontos) Determine uma função diferenciável $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$.

$$u(x,y) = x^3 + 2x - 3xy^2$$

$$v(x,y) = 3x^2y + 2y - y^3 + C$$

$$f(x,y) = (x^3 + 2x - 3xy^2) + i(3x^2y + 2y - y^3) + \underbrace{iC}_{=D}$$

$$= x^3 + 3x^2(iy) - 3xy^2 - y^3 + 2(x+iy) + D$$

$$= x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 - y^3 + 2(x+iy) + D$$

$$= \underbrace{(x+iy)^3}_{=z^3} + 2\underbrace{(x+iy)}_{=z} + D$$

$$\therefore f(z) = z^3 + 2z + D, \quad D \in \mathbb{C}$$