

UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM044 - Cálculo IV
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO
SEGUNDA PROVA - 15/05/2025

Nome: _____

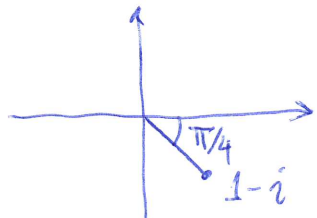
GRR _____

INFORMAÇÕES IMPORTANTES

1. A prova tem 4 questões.
2. Você pode usar todos os resultados demonstrados em aula.
3. Justifique suas respostas.
4. Boa prova!

Questão 1 (20 pontos) Determine todos os valores de $\log z$ para cada z abaixo:

1. $z = 1 - i$

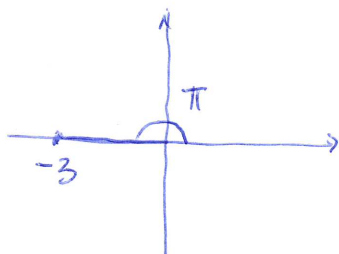


$$1-i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$$

$$\therefore \log(1-i) = \ln \sqrt{2} + i \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\log(1-i) = \frac{\ln 2}{2} + \left(2k - \frac{1}{4} \right) i\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2. $z = -3$



$$-3 = 3(-1) = 3e^{i\pi}$$

$$\therefore \log(-3) = \ln 3 + i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

$$\log(-3) = \ln 3 + (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

Questão 2 (20 pontos) Determine todas as soluções da equação

$$\operatorname{sen} z = -i.$$

(Dica: $\operatorname{arcsinh} t = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$)

$$z = x + iy \quad \therefore \quad \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{senh} y \cos x = -i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x \cosh y = 0 & (i) \\ \operatorname{senh} y \cos x = -1 & (ii) \end{cases}$$

Como $\cosh y > 0$, $y \in \mathbb{R}$, ENTÃO (i) $\Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \quad \therefore x = k\pi$,

com $k \in \mathbb{Z}$. SUBSTITUINDO EM (ii), OBTENHAMOS

$$-1 = \operatorname{senh} y \cdot \cos x = \operatorname{senh} y \cos(k\pi) = \operatorname{senh} y \cdot (-1)^k$$

$$\therefore \operatorname{senh} y = (-1)^{k+1}$$

$$y = \ln \left((-1)^{k+1} + \sqrt{((-1)^{k+1})^2 + 1} \right)$$

$$y = \ln \left((-1)^{k+1} + \sqrt{2} \right)$$

LOGO, AS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO $\operatorname{sen} z = -i$ SÃO

DA FORMA

$$z = k\pi + i \ln \left((-1)^{k+1} + \sqrt{2} \right), \quad k \in \mathbb{Z} //$$

Questão 3 Considere a função multivalorada dada por $f(z) = z^{2z}$, $z \neq 0$.

① (15 pontos) Determine $f'(z)$ em qualquer $z \neq 0$.

$$\begin{aligned} f(z) &= z^{2z} = e^{2z \log z} \quad \therefore f'(z) = e^{2z \log z} \cdot (2z \log z)' = \\ &= z^{2z} \cdot 2 \left(1 \cdot \log z + z \cdot \frac{1}{z} \right) = z^{2z} (\log z + 1) \quad // \end{aligned}$$

② (15 pontos) Determine todos os valores de $f(i)$. Qual é o valor principal de $f(i)$?

$$f(i) = i^{2i} = e^{2i \log i}, \quad \text{MAS}$$

$$\begin{aligned} \log(i) &= \log(1 \cdot e^{i\pi/2}) \\ &= \ln 1 + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \left(2k + \frac{1}{2} \right) \pi i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(i) &= e^{2i \cdot \left(2k + \frac{1}{2} \right) \pi i} \\ &= e^{-2 \left(2k + \frac{1}{2} \right) \pi} \\ &= e^{-(4k+1)\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

O VALOR PRINCIPAL DE $f(i)$ CORRESPONDE
A $k=0$, QUE RESULTA EM $f(i) = e^{-\pi}$.
//

Questão 4 Dados $z, w \in \mathbb{C}$, se $\sec z = w$ dizemos que $z = \operatorname{arcsec} w$.

(a) (20 pontos) Mostre que a função multivalorada $\operatorname{arcsec} w = z$ pode ser definida por

$$\operatorname{arcsec} w = -i \log \left\{ \frac{1}{w} + \left(\frac{1}{w^2} - 1 \right)^{1/2} \right\}.$$

TEMOS QUE $w = \sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{2}{e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}}}$

pondo $e^{iz} = u$, TEMOS

$$w = \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \Rightarrow u + \frac{1}{u} = \frac{2}{w}$$

$$\therefore u^2 + 1 = \frac{2u}{w} \Rightarrow u^2 - \frac{2u}{w} + 1 = 0$$

$$\left(u^2 - \frac{2u}{w} + \frac{1}{w^2} \right) - \frac{1}{w^2} + 1 = 0 \Rightarrow \left(u - \frac{1}{w} \right)^2 = \frac{1}{w^2} - 1$$

$$\therefore u - \frac{1}{w} = \left(\frac{1}{w^2} - 1 \right)^{1/2} \Rightarrow u = \frac{1}{w} + \left(\frac{1}{w^2} - 1 \right)^{1/2}$$

$$e^{iz} = \frac{1}{w} + \left(\frac{1}{w^2} - 1 \right)^{1/2} \Rightarrow iz = \log \left(\frac{1}{w} + \left(\frac{1}{w^2} - 1 \right)^{1/2} \right)$$

$$\therefore z = \frac{1}{i} \log \left(\frac{1}{w} + \left(\frac{1}{w^2} - 1 \right)^{1/2} \right) = -i \log \left(\frac{1}{w} + \left(\frac{1}{w^2} - 1 \right)^{1/2} \right).$$

(b) (20 pontos) Determine todas as soluções da equação

$$\sec z = \frac{1}{2}$$

VAMOS USAR A FÓRMULA DO ITEM (a) PARA RESOLVER

A EQUAÇÃO DADA:

$$\sec z = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{2}\right) = -i \left(\log\left(\frac{1}{1/2} + \left(\frac{1}{(1/2)^2} - 1\right)^{1/2}\right) \right)$$

$$\therefore z = -i \log(2 + 3^{1/2}) \quad \xrightarrow{3^{1/2} \text{ ASSUME OS VALORES } \sqrt{3} \text{ E } -\sqrt{3}.}$$

$$= -i \log(2 \pm \sqrt{3})$$

AMBOS SÃO > 0

$$= -i (\ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$= 2k\pi - i \ln(2 \pm \sqrt{3})$$

$$= 2k\pi + i \ln((2 \pm \sqrt{3})^{-1}) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2 + \sqrt{3}} &= 2 - \sqrt{3} \quad \text{E} \\ \frac{1}{2 - \sqrt{3}} &= 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$z = 2k\pi + i \ln(2 \pm \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z} //$$