

Lista 2

☆ Técnicas de demonstração

1. Prove que os números reais abaixo são irracionais:

① $\sqrt{7}$

② $\sqrt[3]{3}$

③ $\sqrt[4]{4}$

④ $1 + \sqrt{2}$

⑤ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

2. Prove as afirmações a seguir:

- (a) A soma de dois inteiros pares é par.
- (b) A soma de dois inteiros ímpares é par.
- (c) A soma de um inteiro par e um inteiro ímpar é ímpar.
- (d) O produto de dois inteiros consecutivos é par.
- (e) O produto de 3 inteiros consecutivos é divisível por 3.
- (f) O produto de n inteiros consecutivos é divisível por n .
- (g) A soma de um inteiro e seu quadrado é um número par.
- (h) O quadrado de um número par é divisível por 4.
- (i) A diferença entre os cubos de dois inteiros consecutivos é ímpar.
- (j) O quadrado de um inteiro ímpar é da forma $8k + 1$ para algum k inteiro.
- (k) A soma dos quadrados de dois inteiros ímpares não pode ser um quadrado perfeito.

3. Prove ou encontre um contraexemplo para as afirmações a seguir:

- (a) A soma de três inteiros consecutivos é divisível por 3.
- (b) A soma de três inteiros consecutivos é par.
- (c) O produto de um inteiro por seu quadrado é par.
- (d) Todo inteiro positivo pode ser escrito como soma de quadrados.
- (e) Para todo inteiro n , o número $n^2 - 1$ não é primo.
- (f) Para todo inteiro n , o número $2^n + 1$ é primo.
- (g) Para todo inteiro n , o número $n^2 + n + 1$ é primo.
- (h) A soma de dois números racionais é um número racional.
- (i) O produto de dois números racionais é um número racional.

- (j) A soma de dois números irracionais é irracional.
- (k) O produto de dois números irracionais é irracional.
- (l) A soma de um número racional e de um número irracional é irracional.

☆ Princípio de Indução Matemática

4. Utilizando o Princípio da Indução Matemática, demonstre que as seguintes identidades são verdadeiras para todo inteiro positivo n :

(a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) $3 + 11 + \dots + (8n-5) = 4n^2 - n$.

(c) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

(d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(e) $1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

(f) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$

(g) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(h) $1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

(i) $1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

(j) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(k) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

(l) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

(m) $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, x \neq 1$.

(n) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(o) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

(p) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$

(q) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$

5. Prove que para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ é verificada a fórmula do *binômio de Newton*:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j},$$

onde $\binom{n}{j} \doteq \frac{n!}{j!(n-j)!}$ para cada $0 \leq j \leq n$.

6. Utilizando o Princípio da Indução Matemática, demonstre que as seguintes desigualdades são verdadeiras para os valores de n indicados:

- (a) $3^n > 2^{n+1}$, para $n \geq 2$.
- (b) $n! > 2^n$, para $n \geq 4$.
- (c) $n! \geq 3^n$ para todo $n \geq 7$;
- (d) $n! \geq 4^n$ para todo $n \geq 9$;
- (e) $n^2 > 2n + 1$, para $n \geq 3$.
- (f) $2^n > n^2$, para $n \geq 5$.
- (g) $n^2 > 5n + 10$, para $n \geq 7$.
- (h) $n! < n^n$, para $n \geq 2$.
- (i) $(1+x)^n > 1+x^n$, para $n > 1$, $x > 0$.
- (j) $1+2+\dots+n < n^2$, para $n > 1$.
- (k) $\sqrt{n} \leq n-1$ para todo $n \geq 3$;
- (l) $2^{n-2} \geq 2n-3$ para todo $n \geq 5$;
- (m) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (n) **(Desigualdade de Bernoulli)** Se $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ e $n \in \mathbb{N}$ então $(1+x)^n > 1+nx$.
- (o) Se $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ então $(1+x)^{2n} > 1+2nx$.
- (p) Se $x \in \mathbb{R}$, $x < 1$ e $n \in \mathbb{N}$ então $(1-x)^n \geq 1-nx$.

7. O conjunto $\mathcal{P}(X)$ das *partes* de um conjunto X dado é definido por

$$\mathcal{P}(X) \doteq \{A : A \subset X\}.$$

Se X é finito e tem n elementos, mostre que $\mathcal{P}(X)$ tem 2^n elementos.

8. Sejam X, Y conjuntos não-vazios finitos com m e n elementos, respectivamente. Mostre, por indução sobre n que o conjunto das funções $f: X \rightarrow Y$ tem n^m elementos. Obtenha o resultado do exercício anterior a partir deste.

9. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

- (a) Prove que $f(0) = 0$.
- (b) Prove que $f(n) = an$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $a = f(1)$.
- (c) Prove que $f(n) = an$ para todo $n \in \mathbb{Z}$
- (d) Prove que $f(r) = ar$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.
- (e) Será que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$?

10. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

- (a) Prove que $f(0) = 1$.
- (b) Prove que $f(n) = a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $a = f(1)$.

- (c) Prove que $f(n) = a^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$
- (d) Prove que $f(r) = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.
- (e) Será que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$?

11. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, dizemos que m divide n se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = km$. Este fato é denotado por $m|n$. Prove a veracidade das seguintes afirmações, para todo $n \in \mathbb{N}$:

- (a) $6|n^3 + 11n$
- (b) $9|4^n + 15n - 1$
- (c) $3^{n+2}|10^{3n} - 1$
- (d) $7|2^{3n} - 1$
- (e) $8|3^{2n} + 7$
- (f) $7|3^{2n+1} + 2^{n+2}$
- (g) $171|773^n - 602^n$
- (h) $424|193^{2n+1} + 231^{2n+1}$
- (i) $169|3^{3n+3} - 26n - 27$

12. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $a > b$. Prove as seguintes afirmações, para todo $n \in \mathbb{N}$:

- (a) $a - b|a^n - b^n$
- (b) $a + b|a^{2n+1} + b^{2n+1}$
- (c) $a + b|a^{2n} - b^{2n}$
- (d) Reobtenha alguns itens do exercício anterior a partir dos itens acima.
- (e) $2|a^2 - a$
- (f) $3|a^3 - a$
- (g) $5|a^5 - a$
- (h) $7|a^7 - a$
- (i) $11|a^{11} - a$

13. Mostre que $1977|931^{547} + 1046^{547}$.

14. Mostre que $7^n - 1$ é divisível por 6 para todo $n \in \mathbb{N}$.

15. Uma *progressão aritmética* (PA) com primeiro termo a_1 e razão r é uma sequência de números reais $a_1, a_2, a_3, \dots$ satisfazendo

$$a_n = a_{n-1} + r,$$

para cada $n \geq 2$.

- (a) Prove que $a_n = a_1 + nr$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Prove que $\sum_{j=1}^n a_j = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}r$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

16. Uma *progressão geométrica* (PG) com primeiro termo a_1 e razão q ($q \notin \{0, 1\}$) é uma sequência de números reais $a_1, a_2, a_3, \dots$ satisfazendo

$$a_n = a_{n-1} \cdot q,$$

para cada $n \geq 2$.

(a) Prove que $a_n = a_1 \cdot q^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Prove que $\sum_{j=1}^n a_j = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = a_1 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

17. Uma *progressão aritmético-geométrica* com primeiro termo a_1 e razão $q \neq 1$ é uma sequência de números reais $a_1, a_2, a_3, \dots$ satisfazendo

$$a_n = q a_{n-1} + r,$$

para cada $n \geq 2$.

(a) Prove que $a_n = q^{n-1} a_1 + r \frac{q^n - 1}{q - 1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Prove que $\sum_{j=1}^n a_j = \frac{q^n - 1}{q - 1} \left(a_1 + \frac{r}{q - 1} \right) + \frac{nr}{q - 1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.