UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM304 - Complementos de Matemática
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA SEGUNDA PROVA - 20/05/2025

Nome:____

GRR____

INFORMAÇÕES IMPORTANTES

1. As 4 primeiras questões da prova são de múltipla escolha. Cada uma destas questões tem 5 alternativas, sendo que somente uma delas é a correta.
2. A questão 5 é discursiva e deve ser resolvida na página 5 da prova.
3. A duração da prova é de **2 (duas) horas**.
4. Todas as questões valem **20 pontos**. Para as questões 1 a 4, serão consideradas somente as respostas apresentadas adequadamente no gabarito abaixo. Questões em branco ou marcadas em duplicidade serão consideradas erradas.
5. Boa prova!

GABARITO - PROVA TIPO B

Q1	a	b	c	d	e
Q2	a	b	c	d	e
Q3	a	b	c	d	e
Q4	a	b	c	d	e

Questão 1 Considere as afirmações abaixo, a respeito de números naturais e divisibilidade:

(1) Dados $m, n \in \mathbb{N}$, se m é par e n é múltiplo de 2026 então $m+n$ é par.

(2) O produto de 5 inteiros consecutivos é divisível por 6.

(3) Existe algum $n \in \mathbb{N}$ *ímpar* tal que $2^{n+3} + n^2 + 7$ é ímpar.

(4) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tem-se que $n! > n^n$.

Os valores lógicos das proposições (1), (2), (3) e (4) são, respectivamente:

(a) F - F - V - F

(b) V - F - V - F

(c) V - V - F - F

(d) V - V - V - V

(e) V - F - F - V

Questão 2 Considere as desigualdades abaixo:

(1) $3n^2 + n + 1 > n^3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) $1 + 2 + 3 + \ldots + n \leq n^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(3) $3^n < 2^{n+2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(4) $2 + 4 + 6 + \ldots + (2n) \leq (n+1)^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Os valores lógicos das proposições (1), (2), (3) e (4) são, respectivamente:

(a) F - V - F - F

(b) V - V - F - F

(c) F - F - V - V

(d) F - V - F - V

(e) V - F - V - V

Questão 3 Considere a *sequência de Fibonacci*, definida para $n \in \mathbb{N}$ pela fórmula de recorrência

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

com $u_1 = u_2 = 1$ e as seguintes afirmações:

(1) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $1 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+1}$.

(2) u_{2025} é par.

(3) Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $u_n \leq n+1$

(4) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}$.

É correto afirmar que:

(a) As proposições 2 e 4 são verdadeiras.

(b) As proposições 1 e 4 são verdadeiras.

(c) As proposições 2 e 3 são verdadeiras.

(d) As proposições 1 e 2 são verdadeiras.

(e) As proposições 3 e 4 são verdadeiras.

Questão 4 Dados $b, n \in \mathbb{N}$, com $b > 1$, sabemos que existem únicos $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ tais que

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b + a_0\,,$$

com $0 \leq a_0, a_1, \ldots, a_k \leq b-1$. A *representação de n na base b* é denotada por $n = (a_k\ a_{k-1}\ \ldots\ a_1\ a_0)_b$. Considere as afirmações abaixo, sobre representações de números nas bases 2 e 10:

1. $(111111)_2 + (101010)_2 = (1101001)_2$
2. $(101010)_2 = (84)_{10}$
3. $(11101)_2 \times (111)_2 = (11101011)_2$
4. Um número $n = (a_k\ a_{k-1}\ \ldots\ a_1\ a_0)_b$ é divisível por 4 se e só se $a_0 = a_1 = 0$.

Os valores lógicos das proposições (1), (2), (3) e (4) são, respectivamente:

(a) F - V - V - F

(b) V - F - F - V

(c) F - V - F - F

(d) V - V - F - V

(e) V - F - V - V

Questão 5 Use indução matemática para provar que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução.

A identidade ($\star$) é trivialmente verificada para $n = 1$, pois $1^3 = 1 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$.
Assumindo ($\star$) verdadeira para um certo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2 + 4n + 4) \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},
\end{aligned}$$

provando que ($\star$) é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$. ∎