UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM312 - Cálculo II (Turma Honors) - 2025/2
Prof. Zeca Eidam

Lista 1

✰ Técnicas de integração

1. Calcule as integrais definidas abaixo:

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{0}(2x-e^x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(3x+1)^2\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{1}(2x+5)(3x+1)\,dx$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4}\frac{1+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

(5) $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

(6) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}|\mathrm{sen}\,\theta|\,d\theta$

(7) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}x\,\mathrm{sen}\,(nx),\ n\in\mathbb{N}$

(8) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}x\cos(nx)\,dx,\ n\in\mathbb{N}$

(9) $\displaystyle\int_{-1}^{2}xe^x\,dx$

(10) $\displaystyle\int_{-1}^{2}x^2e^x\,dx$

(11) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$

(12) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\mathrm{sen}^2\theta\,d\theta$

(13) $\displaystyle\int_{-3}^{3}(\mathrm{sen}\,(x^5)-x^7\cos x)\,dx$

(14) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x\cos(x^2+2x)+3x)\,dx$

(15) $\displaystyle\int_{0}^{2}xe^{x^2}\,dx$

(16) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4}\mathrm{tg}^2\theta\,d\theta$

(17) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\mathrm{sen}^4\theta\,d\theta$

(18) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta$

(19) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4}\sec\theta\,d\theta$

(20) $\displaystyle\int_{0}^{1}x^2\sqrt{x+1}\,dx$

(21) $\displaystyle\int_{0}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(22) $\displaystyle\int_{0}^{1}e^{\sqrt{x}}\,dx$

(23) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1+\cos x}\,dx$

(24) $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

(25) $\displaystyle\int_{0}^{1}\sqrt{1+x^2}\,dx$

(26) $\displaystyle\int_{0}^{1/2}\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

(27) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{sen}\,(x^2+1)\,dx$

(28) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{4+x^6}\,dx$

(29) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

2. Calcule as integrais indefinidas abaixo:

(1) $\displaystyle\int\frac{x^7+x^2+1}{x^2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int e^{2x}\,dx$

(3) $\displaystyle\int\cos 7x\,dx$

(4) $\displaystyle\int\mathrm{tg}^2x\,dx$

(5) $\displaystyle\int\frac{7}{x-2}\,dx$

(6) $\displaystyle\int\mathrm{tg}^3x\sec^2x\,dx$

(7) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{sen}^3x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

(8) $\displaystyle\int\mathrm{tg}\,x\,dx$

(9) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

(11) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

(12) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

(13) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

(14) $\displaystyle\int \sec x\,dx$

(15) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

(16) $\displaystyle\int x^2\sqrt[5]{x^3+1}\,dx$

(17) $\displaystyle\int \frac{4x+8}{2x^2+8x+20}\,dx$

(18) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

(19) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\arcsin x)\ \sqrt{1-x^2}}$

(20) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

(21) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

(22) $\displaystyle\int e^{x^3}x^2\,dx$

(23) $\displaystyle\int e^x\sqrt[3]{1+e^x}\,dx$

(24) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

(25) $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$

(26) $\displaystyle\int 2x(x+1)^{2025}\,dx$

(27) $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\,dx$

(28) $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$

(29) $\displaystyle\int x^\alpha\ln x\,dx,\ \alpha\in\mathbb{R}$

(30) $\displaystyle\int (\ln x)^2\,dx$

(31) $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$

(32) $\displaystyle\int x\arctan x\,dx$

(33) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$

(34) $\displaystyle\int \sec^3 x\,dx$

(35) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$

(36) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx$

(37) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx$

(38) $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$

(39) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$

(40) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$

(41) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-1}\,dx$

(42) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$

(43) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(44) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

(45) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

(46) $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

(47) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$

(48) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\,dx$

(49) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$

(50) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4}\,dx$

(51) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-2x-3}\,dx$

(52) $\displaystyle\int \sqrt{a^2+b^2x^2}\,dx,\ a,b>0$

(53) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

(54) $\displaystyle\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

(55) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

(56) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$

(57) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$

(58) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$

(59) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\cos^5 x\,dx$

(60) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x\cos^3 x}$

(61) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$

(62) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos^5 x\,dx$

(63) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x\,dx$

(64) $\displaystyle\int \cos^6 x\,dx$

(65) $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x}\,dx$

(66) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x}$

(67) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

(68) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

(69) $\int \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$

(70) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

(71) $\int \frac{dx}{1+e^x}$

(72) $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx$

(73) $\int x^5 e^{-x^3}\,dx$

(74) $\int \arctan\sqrt{x}\,dx$

(75) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx$

(76) $\int \cos^3 x(1+\sqrt{\operatorname{sen} x})\,dx$

✰ Funções definidas por integrais

3. Calcule a derivada das seguintes funções:

(1) $f(x) = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} e^{t^2}\,dt$

(2) $f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)\,dt$

(3) $f(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{x^3} \frac{dt}{1+t^4}$

(4) $f(x) = \int_{x}^{x^2} t\operatorname{sen}(2t-1)\,dt$

(5) $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} t^{1/2}e^t\,dt$

(6) $f(x) = \int_{3-2x^2}^{\ln x} \cos(t^2)\,dt$

(7) $f(x) = \int_{0}^{5\operatorname{sen} x} \frac{e^{3t^2}}{t^2+1}\,dt$

(8) $f(x) = \int_0^x (x-t)e^{-t^2}\,dt$

(9) $f(x) = \int_x^{x^2+7} (x+t)\operatorname{sen} t\,dt$

(10) $f(x) = \int_{-\infty}^{\operatorname{sen} x} e^{-t^2}\,dt$

(11) $f(x) = \int_{-\infty}^{e^x} \frac{3-2t^4}{1+t^8}\,dt$

(12) $f(x) = \int_{x^2}^{\infty} e^{-t}\ln t\,dt$

(13) $f(x) = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} e^{t^2}\,dt$

(14) $f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)\,dt$

(15) $g(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{x^3} \frac{dt}{1+t^4}$

4. Esboce o gráfico das funções abaixo:

① $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

② $f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$

5. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja

$$y = y(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(x-t) f(t)\,dt$$

Prove que $y'' + y = f(x)$ e $y(0) = y'(0) = 0$, para todo $x \in I$.

6. Seja $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^3}\,dt$. Calcule $\int_0^2 xF(x)\,dx$ em termos de $F(2)$.

7. Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}(2x)} \cos(t^2)\,dt}{\displaystyle\int_0^{e^{3x}-1} e^{-t^2}\,dt}.$$

8. Mostre que $f(x) = \displaystyle\int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int_0^{x} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ é constante em $(0,\infty)$. Conclua que

$$\arctan x + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2},$$

para todo $x > 0$.

9. Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

① Mostre que f é crescente e ímpar.

② Fixado $x > 1$, conclua, integrando a desigualdade

$$0 \le \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \le \frac{1}{t^2}$$

entre 1 e x, que $f(x) \le f(1) + 1 - \dfrac{1}{x} \le f(1) + 1 \le 2$.

③ Mostre que $L \doteq \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe e é positivo.

④ Esboce o gráfico de $f(x)$, localizando seu ponto de inflexão.

10. Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^{x} e^{\frac{x^2-t^2}{2}}\,dt$. Mostre que $f'(x) - xf(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

11. Seja $F : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \displaystyle\int_1^{x} \sqrt{t^3-1}\,dt$.

① Calcule o comprimento do gráfico de F entre $x = 1$ e $x = 4$.

② Calcule $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{F(x^3) - F(8)}{\operatorname{sen}(x-2)}$

12. (Função seno integral) A função *Seno integral* é definida como

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^{x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

(a) Mostre que a função Si é bem-definida, i.e., a integral acima converge.

(b) Esboce o gráfico de Si. (Pode-se provar que $\lim_{x\to\infty} \operatorname{Si}(x) = \pi/2$; você pode usar este fato.)

☆ Funções reais de duas e três variáveis

13. Ache e esboce o domínio das funções:

(1) $f(x,y)=\sqrt{x-y}$

(2) $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$

(3) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

(4) $f(x,y)=\dfrac{x}{y^x}$

(5) $f(x,y)=\operatorname{tg}(x-y)$

(6) $f(x,y)=\ln(xy^2-x^3)$

(7) $f(x,y)=\ln(16-4x^2-y^2)$

14. Esboce uma família de curvas de nível de:

(1) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$

(2) $f(x,y)=x-\sqrt{1-y^2}$

(3) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2-y^2}$

(4) $f(x,y)=\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$

15. Esboce os gráficos de:

(1) $f(x,y)=1-x-y$

(2) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+1}$

(3) $f(x,y)=\sqrt{x^2+9y^2}$

(4) $f(x,y)=\dfrac{1}{4x^2+9y^2}$

(5) $f(x,y)=(x-y)^2$

(6) $f(x,y)=x^2+y^2+2y+3$

(7) $f(x,y)=\dfrac{1}{(x^2+2y^2)^2}$

(8) $f(x,y)=\ln(9x^2+y^2)$

(9) $f(x,y)=2-\sqrt[4]{x^2+4y^2}$

(10) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}$

(11) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}$

✰ Limites e continuidade

16. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$

(6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^3-y}$

(8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

(9) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$

(10) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}\operatorname{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

(11) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$

(12) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{y^4+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$

(13) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(14) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

(15) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^4}{x^2+y^8}$ (16) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\operatorname{sen}^2 y}{x^2+2y^2}$

17. Determine o conjunto dos pontos de continuidade das funções abaixo:

(a) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{e^x - y^2}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x-y^3}}{1-x^2-y^2}$

(c) $f(x,y) = \arctan(x + \sqrt{1/y})$ (d) $f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2)$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^3} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)((x-1)^2+(y-1)^2)} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \text{ e } (x,y) \neq (1,1) \\ 1 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \text{ ou } (x,y) = (1,1) \end{cases}$

☆ Integrais impróprias (Tópico adicional/opcional)

18. Decida quais integrais impróprias abaixo são convergentes e tente calcular seu valor. Dentre as convergentes, tente determinar aquelas que são absolutamente convergentes.

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha},\ \alpha > 0$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha},\ \alpha > 0$

(3) $\displaystyle\int_1^\infty \ln x\, dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$

(5) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} dx,\ \alpha > 0$

(6) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha} dx,\ \alpha > 0$

(7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)\, dx$

(8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2)\, dx$

(9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(x^\alpha)\, dx,\ \alpha > 0$

(10) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x} dx,\ \alpha,\beta > 0$

(11) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx$

(12) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \ln x\, dx$

(13) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

(14) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^5+3x^2-7}{x^6+3x^2+3} dx$

(15) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\sqrt{x}+\operatorname{sen} x}{x^3+5\ln x} dx$

(16) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx,\ \alpha > 0$

(17) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha} dx,\ \alpha > 0$

(18) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx,\ \alpha,\beta > 0$

(19) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$

(20) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

(21) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha},\ \alpha > 0$

(22) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha e^{-x^\beta} dx,\ \alpha,\beta > 0$

(23) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{sen}(1/x)\, dx$

(24) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx$

(25) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(x^\alpha)}{x^\beta},\ \alpha,\beta > 0$

(26) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^2+2025}}{\sqrt[3]{x^7+3x^3+2}} dx$

(27) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(28) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha \ln x},\ \alpha > 0$

(29) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1} dx,\ \alpha > 0$

(30) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^5+7x^4+11}} dx$

(31) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(32) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen} x}{1+x^3} dx$

(33) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x^2-1)e^{-x^2}}{x^4+x^2+7} dx$

19. (Função Gamma) A função Gamma é definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \, dt,$$

para $x > 0$.

(a) Mostre que Γ é bem-definida, i.e., que a integral acima é convergente para todo $x > 0$.

(b) Use integração por partes para mostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, para todo $x > 0$.

(c) Use indução em n para mostrar que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo inteiro $n > 0$. Isso mostra que a função Γ é uma extensão da função fatorial para todos os reais positivos.

(d) Use o ítem (2) para definir Γ em toda a reta, exceto nos inteiros não-positivos.

20. (Função Erro) A função *Erro* é definida por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, dt, \; x \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que a função erf é bem-definida, i.e., a integral acima converge.

(b) Esboce o gráfico da função erro.

(c) Pode-se provar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \sqrt{\pi}$. Use este fato e a mudança de variável $t^2 = u$ para mostrar que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

✰ Comprimentos, áreas e volumes (Tópico adicional/opcional)

21. Determine o volume de uma pirâmide cuja base é o quadrado de lado L e cuja altura é h.

22. Calcule o volume do sólido cuja base é a astróide de equação $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ e tal que as seções transversais por planos paralelos ao plano Oxz são quadrados.

23. Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \ldots + \operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

24. Calcule o comprimento do gráfico de $f(x) = \ln(\cos x)$, para $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

25. Calcule o comprimento da astróide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

26. Calcule a área da região do plano limitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

27. Determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le xy \le 2, \; x^2 + y^2 \le 5 \text{ e } x > 0\}$.

b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge \sqrt{x} \text{ e } (x-1)^2 + y^2 \le 1\}$.

c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2 \text{ e } e^{-x} \le y \le e^{x}\}$.

d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \; y \le 1 \text{ e } 1/x \le y \le 4/x^2\}$.

28. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = 3$ da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$.

29. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \ln(x+1) + 2 \leq y \leq e^x + 4\}$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno da reta $y = 2$.

30. O disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ é girado em torno da reta $x = b$, com $b > a$, para gerar um sólido, com a forma de um pneu. Esse sólido é chamado **toro**. Calcule seu volume.

31. Calcule o volume de uma calota esférica de altura h, $h \leq a$, de uma esfera de raio a.

32. Determine o comprimento da curva $y = \cosh x$, $a \leq x \leq b$.

33. Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco cilíndrico através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio R e o anel esférico tem altura h, prove o fato notável de que o volume do anel depende de h, mas não de R.