UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM312 - Cálculo II - Engenharia Química - 2025/2
Prof. Zeca Eidam

Lista 2

✰ Limites e continuidade

1. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique o motivo:

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$

(6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3-y}$

(8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4\sin(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

(9) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$

(10) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

(11) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$

(12) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\sin(x^2+y^2)}{y^4+\sin(x^2+y^2)}$

(13) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(14) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

(15) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$

(16) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2 y}{x^2+2y^2}$

(17) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5+11xy-y^6}{x^4+17x^3y^2+6y^7}$

(18) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\ln(1+|xy|}{\sqrt{x^4+y^6}}$

(19) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{2(x^4+y^2)}-\cos(3\sqrt{x^4+y^2})+16xy^2}{3x^4+3y^6}$

(20) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin x}{x+y}$

(21) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\cos x}{x+y}$

(22) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin(7xy)}{xy\sqrt[4]{x^8+e^{7y}\tan^2(x+5y)}}$

(23) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-2x^2+y^3}-\cos(x^2)2^{y^3}}{x^4}$

(24) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y}}$

(25) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2e^{x+3y}-\sin x}{5e^x+2\cos(xy)}$

(26) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+(xy)^4)\sin^2 x}{\sqrt{\sin^4 x+6\arctan(x-y)^2}}$

(27) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\sin(3y)}{x^2+y^4}$

2. Determine o conjunto dos pontos de continuidade das funções abaixo:

(a) $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{e^x - y^2}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x-y^3}}{1-x^2-y^2}$

(c) $f(x,y) = \arctan(x + \sqrt{1/y})$

(d) $f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2)$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^3} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)((x-1)^2+(y-1)^2)} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \text{ e } (x,y) \neq (1,1) \\ 1 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \text{ ou } (x,y) = (1,1) \end{cases}$

☆ Derivadas parciais, gradiente e diferenciabilidade

3. Determine as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções:

   (1) $f(x,y) = \arctan(y/x)$

   (2) $f(x,y) = \ln(1+\cos^2(xy^3))$

   (3) $f(x,y) = \dfrac{1-xy}{1+x^2+y^2}$

   (4) $f(x,y) = (1+x^2)^y$

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:

   (1) $u(x,y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$

   (2) $u(x,y) = f(ax+by)$, com $a, b \in \mathbb{R}$

   (3) $u(x,y) = f(xy^2 - 2x)$

   (4) $u(x,y) = f(e^{x^2+y^2})$

5. Sendo $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} e^{\sin(x^2y)}$, determine $f_x(1,0)$ diretamente a partir da definição de derivada parcial.

6. Sejam $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$ e $g(x,y) = |xy|^{\frac{5}{4}}$. Mostre que f e g são funções de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

7. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} + \sin(x+3y) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que as derivadas parciais f_x e f_y existem em todos os pontos.

   (b) f é contínua em $(0,0)$?

   (c) f é diferenciável em $(0,0)$?

8. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que f é contínua em (0,0).

(b) Calcule $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

(c) f é diferenciável em $(0,0)$?

(d) As funções f_x e f_y são contínuas em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

9. Considere $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

   (b) As derivadas parciais f_x e f_y são contínuas em $(0,0)$?

10. Considere $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|\sin\left(x^2y - yx^3\right)}{\sqrt{x^6+y^2}} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Determine o valor de a para que f seja contínua em $(0,0)$.

    (b) Mostre que f é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

11. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sin\left((x^2+y^2)^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Verifique que f é contínua em $(0,0)$.

    (b) Determine $f_y(x,y)$ para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

    (c) A função f_y é contínua em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

    (d) A função f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

12. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \sqrt[3]{x^4+y^4}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

    (a) Determine as derivadas parciais de f em todos os pontos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e prove que f é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

    (b) f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

13. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{3/4}\sin\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} .$$

    Mostre que f é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

14. Para cada uma das funções f a seguir, determine o conjunto de pontos nos quais f é diferenciável:

(1) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$

(2) $f(x,y)=x|y|$

(3) $f(x,y)=e^{\sqrt{x^4+y^4}}$

(4) $f(x,y)=\cos(\sqrt{x^2+y^2})$

(5) $f(x,y)=\sqrt[5]{x^5+y^5}$

(6) $f(x,y)=\sin(\cos(x^5+y^4))-e^{-x^2-y^3}$

(7) $f(x,y)=|xy|^{5/4}$

(8) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

15. Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=\sqrt[3]{x^5+y^5}$.

    (a) Determine as derivadas parciais de f em todos os pontos do conjunto $B=\{(a,b)\,:\,b\neq -a\}$. Conclua que f é diferenciável em B.

    (b) Determine as derivadas parciais de f na origem, se existirem.

    (c) f é diferenciável na origem? Justifique.

16. Seja $f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

    (a) Verifique que $f_x(0,y)=-y$ para todo y, e que $f_y(x,0)=x$, para todo x.

    (b) Verifique que $f_{xy}(0,0)=1$ e que $f_{yx}(0,0)=-1$.

17. Determine a equação do plano tangente e a equação da reta normal ao gráfico de cada uma das funções abaixo no ponto indicado:

    (1) $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$, no ponto $(0,0,1)$

    (2) $f(x,y)=\ln(2x+y)$, no ponto $(-1,3,0)$

    (3) $f(x,y)=x^2-y^2$, no ponto $(-3,-2,5)$

    (4) $f(x,y)=e^x\ln y$, no ponto $(3,1,0)$.

18. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0,1,5)$ e $(0,0,6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x,y)=x^3y$.

19. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto (x_0,y_0) dado e dê a direção em que ela ocorre.

    (a) $f(x,y)=xe^{-y}+3y$, $(x_0,y_0)=(1,0)$;

    (b) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, $(x_0,y_0)=(1,2)$;

20. Mostre que $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$ é contínua em $(0,0)$ e tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$. A função f é diferenciável em $(0,0)$?

21. Um *campo de vetores* definido em um aberto $U\subset\mathbb{R}^2$ é uma função $\vec{F}$ que associa a cada ponto $(x,y)\in U$ um vetor $\vec{F}(x,y)$ em $\mathbb{R}^2$. Em particular, dado um tal $\vec{F}$, existem funções $P,Q:U\to\mathbb{R}$ tais que

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y)),$$

para todo $(x,y)\in U$. O campo $\vec{F}$ é dito de classe C^1 se P,Q forem funções de classe C^1.

(a) Se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 em U, o *campo gradiente de f* é o campo de vetores ∇f definido por

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)).$$

Neste caso, $P = f_x$ e $Q = f_y$. Conclua que se $\vec{F} = (P,Q)$ é o campo gradiente de alguma função de classe C^2 então, necessariamente, $Q_x = P_y$ em U.

(b) Mostre que não existe nenhuma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $\nabla f(x,y) = (x^2 y, y^2)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Considere em $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o campo

$$\vec{F}(x,y) \doteq \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right).$$

Mostre que $\vec{F}$ satisfaz a equação $Q_x = P_y$, mas não existe nenhuma função $f : U \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \vec{F}$.

(d) Se $f(x,y) = \arctan(y/x)$, mostre que ∇f é igual ao campo $\vec{F}$ do item anterior. Encontre o maior domínio possível no qual f é contínua e a igualdade $\nabla f = \vec{F}$ é verificada.

✰ Regra da cadeia

22. Verifique que a função $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ satisfaz a *equação de Laplace bidimensional*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

23. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções duas vezes diferenciáveis.

(a) Mostre que $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ satisfaz a equação $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.

(b) Mostre que $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ é solução da equação $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.

24. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

(a) $w = x^2 + y^2; x = t^2 + u^2, y = 2tu$

(b) $w = \dfrac{x}{x^2+y^2}; x = t\cos u, y = t\sin u$

(c) $w = x^2 + y^2 + z; x = tu, y = t + u, z = t^2 + u^2$

25. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Calcule g_u, g_v, em função de f_x, f_y nos seguintes casos:

(1) $g(u,v) = f(u^2, v^3)$

(2) $g(u,v) = \sin u - f(2u - 3v^2, u - \cos v)$

(3) $g(u,v) = f(\sin(u+v), \cos(u-v))$

(4) $g(u,v) = f(e^{u^2}, \ln(u+v))$

26. O raio de um cilindro circular está decrescendo à taxa de 1,2cm/s enquanto sua altura está crescendo à taxa de 3cm/s. A que taxa o volume do cilindro está variando quando o raio vale 80 cm e a altura vale 150 cm?

27. Sejam $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\nabla f(-2,-2) = (a,-4)$ e

$$g(t) = f(2t^3 - 4t, t^4 - 3t).$$

Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = 2x + 3$.

28. Seja $u = u(x, y)$ função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$. O *laplaciano de u* é definido por $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$. Neste exercício, vamos mostrar como calcular Δu em coordenadas polares.

   (a) Definindo $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\mathrm{sen}\theta)$, mostre que $v_r = \cos\theta u_x + \sin\theta u_y$ e $v_\theta = -r\sin\theta u_x + r\cos\theta u_y$.

   (b) Conclua que

$$\Delta u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\theta) = v_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r} v_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}(r,\theta)\,.$$

29. Seja $f = f(x, y)$ uma função de classe C^2 e seja $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(u, v) = uf(u^2 - v, u + 2v)$.

   (a) Determine g_{uv} em função das derivadas parciais de f.

   (b) Sabendo que $3x + 5y = z + 26$ é o plano tangente ao gráfico de f, $f_{xy}(1,4) = f_{xx}(1,4) = 1$ e $f_{yy}(1,4) = -1$, calcule $g_{uv}(-2,3)$.

30. Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e admitamos que

$$\pi : 2x - 3y - z = 3$$

seja o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,-1, f(1,-1))$.

   (a) Determine os valores de $f(1,-1)$, $\nabla f(1,-1)$ e $f_v(1,-1)$, onde $v = (5,-1)$.

   (b) Considerando $g(u, v) \doteq \sin(uv) - f(u + v, v - e^{uv})$, determine $\nabla g(1,0)$.

   (c) Considerando $\varphi(t) \doteq f(e^t + \sin(4t), t - e^{-t})$, determine $\varphi'(0)$.

31. Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $(-3,2)$. Suponha que $f(-3,2) = 1$ e que o plano

$$\pi : 3x - 5y + 2z = 2014$$

seja paralelo ao plano tangente ao gráfico de f no ponto $(-3,2,1)$. Determine:

   (a) $\nabla f(-3,2)$;

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial v}(-3,2)$, onde $v = (2,-1)$;

   (c)

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left\{3t + f(x(t), y(t))\right\}^2,$$

   onde $x(t) = 2e^{-t} - 5\cos t + 4t^2$ e $y(t) = t^5 + t^3 + 6\ln(1+t) + \tan t + 2$;

   (d) $g_u(0,1)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial v}(0,1)$, onde $g(u, v) = f(u^4 - 3v, e^{2u} + v^2)$.

32. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável que admite o plano de equação

$$2x-6y+2z=7$$

como tangente ao seu gráfico no ponto $(3,-1,f(3,-1))$.

(a) Determine $f(3,-1)$, $\nabla f(3,-1)$ e $f_v(3,-1)$, onde $v=(-1,1)$

(b) Seja $g(t)=f(x(t),y(t))$, onde

$$x(t)=2^t-4\sin t+\cos t\,,\ y(t)=t^5-4t^4+6t\sin t-1\,.$$

Determine $g'(0)$.

(c) Seja

$$g(u,v)=\left\{u+f(3\cos u+\sin v,uv-e^{u+v})\right\}^2\,,\ (u,v)\in\mathbb{R}^2\,.$$

Determine $\nabla g(0,0)$.

33. Seja $F(r,s)=G(\mathrm{e}^{rs},r^3\cos(s))$, onde $G=G(x,y)$ é uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$.

(a) Calcule $F_{rr}(r,s)$ em função das derivadas parciais de G.

(b) Determine $F_{rr}(1,0)$ sabendo que $G_y(t^2+1,t+1)=t^2-2t+3$.

34. Determine $c\in\mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x,y)=\ln(x^2+cy^2)$ no ponto $(2,1,f(2,1))$ seja perpendicular ao plano $3x+z=0$.

35. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, tal que $2x+y+z=7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0,2,f(0,2))$. Se

$$g(u,v)=u\,f\left(\operatorname{sen}(u^2-v^3),2u^2v\right),$$

determine $a\in\mathbb{R}$ tal que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1,1,g(1,1))$ seja paralelo ao vetor $(4,2,a)$.

36. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável. Mostre que todos os planos tangentes ao gráfico da função $F(x,y)=xf\left(\dfrac{x}{y}\right)$ passam pela origem.

37. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas $\gamma(t)=(2,t,2t^2)$ e $\mu(t)=(2t^2,t,2t^4)$ estejam contidas no gráfico de f. Determine o gradiente de f no ponto $(2,1)$.

38. O gradiente de $f(x,y)=x^2+y^4$ é tangente à imagem da curva $\gamma(t)=(t^2,t),\ t>0$ em um ponto P. Encontre a equação da reta tangente à curva de nível de f que contém P, no ponto P.

39. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t)=(t+1,-t^2),\ t\in\mathbb{R}$, é uma curva de nível de f. Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,-4)=2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1,-4)$ e na direção e sentido do vetor $\vec{u}=(3,4)$.

40. Seja $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

(a) Calcule o gradiente de f no ponto $(0,0)$.

(b) Mostre que $\dfrac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big) \neq \nabla f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$ em $t = 0$, onde $\gamma(t) = (-t, -t)$.

(c) Seja $\vec{u} = (a, b)$ um vetor unitário (isto é, $a^2 + b^2 = 1$). Use a definição de derivada direcional para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$.

(d) f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

41. Seja $a > 0$ e considere o plano tangente à superfície $xyz = a$ num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tem volume independente do ponto de tangência.

42. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, uma função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ é dita *homogênea de grau* λ se satisfaz $f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y)$ para todos $t > 0$ e $(x, y) \neq (0,0)$. Supondo que f é uma função de classe C^2 homogênea de grau λ, verifique que:

(a) $x f_x + y f_y = \lambda f$; (Relação de Euler)

(b) As funções f_x e f_y são homogêneas de grau $\lambda - 1$.

43. Verifique que as funções abaixo são homogêneas e determine o grau:

(1) $f(x, y) = 5x^2 + 2xy - y^2$

(2) $f(x, y) = \dfrac{x e^{\frac{x}{y}}}{x^2 + y^2}$

(3) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 + y^3}}$

(4) $f(x, y) = \dfrac{xy \sin(y/x)}{x^4 + y^4}$