UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM312 - Cálculo II - Turma Honors
Prof. Zeca Eidam

Lista 3

✰ Máximos e mínimos de funções de duas e três variáveis

1. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

   (a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$ (b) $z = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$ (c) $z = x^2y^2$
   (d) $z = x^4 + xy + y^2 - 6x - 5y$ (e) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ (f) $z = y\cos x$
   (g) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$ (h) $z = y^4 + 4x^2y - 4x^2 - 8y^2$ (i) $z = xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$
   (j) $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$ (k) $z = (x-1)^3 + (y-2)^3 - 3x - 3y$ (l) $z = x^3y^3$
   (m) $z = x^{-2} + y^{-1} + xy$, $x > 0$, $y > 0$ (n) $z = \sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$ (o) $z = x^4 + y^4 + x + y$

2. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D indicada.

   (a) $f(x,y) = 5 - 3x + 4y$; D é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$
   (b) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2,\ x \leq 0,\ y \geq 0\}$
   (c) $f(x,y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
   (d) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -3 \leq x \leq 3,\ -3 \leq y \leq 3\}$.
   (e) $f(x,y) = (4x - x^2)\cos y$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3,\ -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$

3. Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f sujeita às restrições explicitadas:

   (a) $f(x,y) = xy$; $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$
   (b) $f(x,y,z) = xyz$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
   (c) $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
   (d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x^4 + y^4 + z^4 = 1$

4. Encontre o máximo e o mínimo absolutos de $f(x,y)$ em D sendo:

   (a) $f(x,y) = xy$; $D = \left\{(x,y) : x^2 - y^2 = 1,\ x \in [1,2]\right\}$
   (b) $f(x,y) = 2x^3 + y^4$; $D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1,\ x \in [0,1/4],\ y \geq 0\right\}$

5. Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0,0)$.

6. Qual o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ que está mais próximo do ponto $(1,1,1)$?

7. Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.

8. Determine o ponto do plano $x + 2y - z = 4$ mais próximo da origem.

9. Considere a função $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ definida em $D = \{(x,y) : x > 0\,,\ y > 0\}$. Determine o plano tangente ao gráfico de f que forma com o planos coordenados o tetraedro de volume mínimo.

10. Determine a distância entre as retas de equação

    $X = (-2,3,-1) + \alpha(4,1,5)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X = (-1,0,3) + \mu(-2,3,1)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

11. Determine o ponto do plano $3x + 2y + z = 12$ cuja soma dos quadrados das distâncias a $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$ seja mínima.

12. Seja $f(x,y) = a(x^2 + y^2) - 2xy$, onde a é uma constante.

    (a) Verifique que, para todo $a \in \mathbb{R}$, o par $(0,0)$ é um ponto crítico de f.

    (b) Para cada valor de a, classifique o ponto crítico $(0,0)$ com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de a para os quais podemos afirmar que $(0,0)$ é extremo global (absoluto) de f?

13. Seja $b \neq 0$ e $f(x,y) = \dfrac{y^4}{4} + bx^2y - bx^2 - 2y^2$.

    (a) Determine, em função de b, o número de pontos críticos de f e classifique-os.

    (b) Faça $b = 3$ e ache os extremos de f no triângulo (fronteira e interior) de vértices $(0,0)$, $(3,3)$ e $(-3,3)$.

14. Determine o valor máximo e o valor mínimo de f em E sendo

    (a) $f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z$ e $E = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 56\}$

    (b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z + 3x$ e $E = \{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 4\}$

15. Encontre uma parametrização para C e use esta parametrização para encontrar, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em C, bem como os pontos onde estes valores são assumidos:

    (a) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$ e $f(x,y) = x^3y$.

    (b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \text{ e } z = 2y\}$ e $f(x,y,z) = x - z$.

    (c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$ e $f(x,y,z) = xz + y$.

    (d) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \text{ e } x - y + 3z = 3\}$ e $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

16. Qual é o ponto da superfície $z^2 = xy + 1$ que está mais próximo da origem?

17. Determine as dimensões de um paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, $z > 0$.

18. Um pentágono de 12 cm de perímetro é construído colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo. Dentre esses pentágonos, determine as medidas dos lados daquele que tem área máxima.

19. Determine a equação do plano que passa por $(2,2,1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.

20. Dentre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ encontre aqueles mais distantes da origem.

21. Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com $27cm^2$ de papelão.

☆ Desigualdade entre média aritmética e geométrica

22. Se $f_1, \ldots, f_n$ são funções positivas satisfazendo $f_1 + \ldots + f_n = k$, onde $k > 0$ é uma constante, então o valor máximo do produto $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$ é assumido se pudermos arranjar as funções $f_1, \ldots, f_n$ de forma que $f_1 = \ldots = f_n$.

23. Se $f_1, \ldots, f_n$ são funções positivas satisfazendo $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n = k$, onde $k > 0$ é uma constante, então o valor mínimo da soma $f_1 + \ldots + f_n$ é assumido se pudermos arranjar as funções $f_1, \ldots, f_n$ de forma que $f_1 = \ldots = f_n$.

24. Dados $a, b, c, k > 0$, determine os valores máximo do produto xyz para $x, y, z > 0$ satisfazendo a relação $ax + by + cz = k$.

25. Dado $k > 0$ qualquer, determine o valor máximo do produto x^2y para $x, y > 0$ satisfazendo a relação $x + y = k$.

26. Dados $k > 0$ qualquer e $m, n \in \mathbb{N}$, determine o valor máximo do produto $x^m y^n$ para $x, y > 0$ satisfazendo a relação $x + y = k$.

27. Dado $k > 0$, determine o valor máximo do produto x^3yz^2 para $x, y, z > 0$ satisfazendo a relação $x + 2y + 3z = k$.

28. Dados $k > 0$ qualquer e $m, n, p \in \mathbb{N}$, determine o valor máximo do produto $x^m y^n z^p$ para $x, y, z > 0$ satisfazendo a relação $x + y + z = k$.

29. Ache o valor mínimo da soma $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{y}$ para $x, y > 0$ satisfazendo $xy = 1$.

30. Dado $a > 0$, ache o valor mínimo da expressão $x(a - x^2)$ para $x > 0$.

31. Encontre o valor mínimo da soma $\dfrac{x}{y} + 2\dfrac{y}{z} + 8\sqrt{\dfrac{z}{x}}$ para $x, y, z > 0$.

32. Mostre que para todos $x, y, z > 0$ tem-se

$$\left(x + y + z\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9,$$

sendo este valor assumido para $x = y = z = 1$. Conclua que se a soma $x + y + z$ é constante igual a c, então

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{c}.$$