

Treino para P2 - 13/10/2025

1. Calcule os limites abaixo, se existirem:

- ① $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2y^5 + \ln(1+x^3) + \sin(x^3 + y^3)}{x^3 + y^3}$
- ② $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \ln(1 + \sin(xy))}{\sqrt[4]{x^8 + \operatorname{tg}^4(x^2 - 2025y)}}$
- ③ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt[7]{x}y^4 + \sin(3x^4 + 3y^4)}{x^5 + y^5\sqrt{y} + \sin(6x^4 + 6y^4)}$
- ④ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-3xy} - \cos(7xy) + \sin(2x)\sin(6y)}{xy}$

2. Determine o conjunto de pontos nos quais as funções abaixo são diferenciáveis:

- ① $f(x, y) = \cos\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$
- ② $f(x, y) = e^{\sqrt{x^4 + y^4}}$
- ③ $f(x, y) = |xy|^{4/3}$
- ④ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy\sqrt{|y|}\sin(xy - x^2)}{\sqrt{x^6 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

3. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(-1, 1) = 3$. Suponhamos que o plano

$$2x - 6y - 3z = 1977$$

seja paralelo ao plano tangente ao gráfico de f no ponto $(-1, 1, 3)$.

- ① Determine $\nabla f(-1, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(-1, 1)$, onde $v = (1, 1)$.
- ② Seja $g(t) = f(x(t), y(t))^2 - \sin f(x(t), y(t))$, onde $x(t) = e^{-t} - 2\cos t$ e $y(t) = t^3 - 4t^2 - 4t + 1$. Determine $g'(0)$.
- ③ Seja

$$h(u, v) = \{2u + v^2 + f(3\cos u - 4v, e^{uv} - 3\sin(2uv))\}^3, (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Determine $\nabla h(0, 1)$.