UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM312 - Cálculo II - Engenharia Química - 2025/2
Prof. Zeca Eidam

Lista 2

✩ Limites e continuidade

1. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique o motivo:

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$

(6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3-y}$

(8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4\sin(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

(9) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$

(10) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

(11) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$

(12) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\sin(x^2+y^2)}{y^4+\sin(x^2+y^2)}$

(13) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(14) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

(15) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$

(16) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2 y}{x^2+2y^2}$

(17) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5+11xy-y^6}{x^4+17x^3y^2+6y^7}$

(18) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\ln(1+|xy|}{\sqrt{x^4+y^6}}$

(19) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{2(x^4+y^2)}-\cos(3\sqrt{x^4+y^2})+16xy^2}{3x^4+3y^6}$

2. Determine o conjunto dos pontos de continuidade das funções abaixo:

(a) $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{e^x-y^2}$

(b) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x-y^3}}{1-x^2-y^2}$

(c) $f(x,y)=\arctan(x+\sqrt{1/y})$

(d) $f(x,y)=\arcsin(x^2+y^2)$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^3} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)((x-1)^2+(y-1)^2)} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \text{ e } (x,y) \neq (1,1) \\ 1 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \text{ ou } (x,y) = (1,1) \end{cases}$

✰ Derivadas parciais, gradiente e diferenciabilidade

3. Determine as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções:

   (1) $f(x,y) = \arctan(y/x)$

   (2) $f(x,y) = \ln(1+\cos^2(xy^3))$

   (3) $f(x,y) = \dfrac{1-xy}{1+x^2+y^2}$

   (4) $f(x,y) = (1+x^2)^y$

4. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:

   (1) $u(x,y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$

   (2) $u(x,y) = f(ax+by)$, com $a,b \in \mathbb{R}$

   (3) $u(x,y) = f(xy^2-2x)$

   (4) $u(x,y) = f(e^{x^2+y^2})$

5. Sendo $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}e^{\sin(x^2y)}$, determine $f_x(1,0)$ diretamente a partir da definição de derivada parcial.

6. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} + \sin(x+3y) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que as derivadas parciais f_x e f_y existem em todos os pontos.

   (b) f é contínua em $(0,0)$?

   (c) f é diferenciável em $(0,0)$?

7. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que f é contínua em (0,0).

   (b) Calcule $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

   (c) f é diferenciável em $(0,0)$?

   (d) As funções f_x e f_y são contínuas em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

8. Considere $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

(b) As derivadas parciais f_x e f_y são contínuas em $(0,0)$?

9. Considere $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|\sin\left(x^2y - yx^3\right)}{\sqrt{x^6+y^2}} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Determine o valor de a para que f seja contínua em $(0,0)$.

   (b) Mostre que f é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

10. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sin\left((x^2+y^2)^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Verifique que f é contínua em $(0,0)$.

    (b) Determine $f_y(x,y)$ para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

    (c) A função f_y é contínua em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

    (d) A função f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

11. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \sqrt[3]{x^4+y^4}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

    (a) Determine as derivadas parciais de f em todos os pontos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e prove que f é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

    (b) f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

12. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{3/4}\sin\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}.$$

    Mostre que f é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

13. Seja $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Verifique que $f_x(0,y) = -y$ para todo y, e que $f_y(x,0) = x$, para todo x.

    (b) Verifique que $f_{xy}(0,0) = 1$ e que $f_{yx}(0,0) = -1$.

14. Determine a equação do plano tangente e a equação da reta normal ao gráfico de cada uma das funções abaixo no ponto indicado:

    (1) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, no ponto $(0,0,1)$

    (2) $f(x,y) = \ln(2x+y)$, no ponto $(-1,3,0)$

    (3) $f(x,y) = x^2-y^2$, no ponto $(-3,-2,5)$

    (4) $f(x,y) = e^x \ln y$, no ponto $(3,1,0)$.

15. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0,1,5)$ e $(0,0,6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x,y) = x^3y$.

16. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto (x_0, y_0) dado e dê a direção em que ela ocorre.

   (a) $f(x,y) = xe^{-y} + 3y$, $(x_0, y_0) = (1,0)$;
   (b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(x_0, y_0) = (1,2)$;

17. Mostre que $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ é contínua em $(0,0)$ e tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$. A função f é diferenciável em $(0,0)$?

☆ **Regra da cadeia**

18. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções duas vezes diferenciáveis.

   (a) Mostre que $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ satisfaz a equação $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.
   (b) Mostre que $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ é solução da equação $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.

19. Verifique que a função $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ satisfaz a *equação de Laplace bidimensional*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

20. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

   (a) $w = x^2 + y^2; x = t^2 + u^2, y = 2tu$
   (b) $w = \dfrac{x}{x^2+y^2}; x = t\cos u, y = t\sin u$
   (c) $w = x^2 + y^2 + z; x = tu, y = t+u, z = t^2 + u^2$

21. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Calcule g_u, g_v, em função de f_x, f_y nos seguintes casos:

   (1) $g(u,v) = f(u^2, v^3)$
   (2) $g(u,v) = \sin u - f(2u - 3v^2, u - \cos v)$
   (3) $g(u,v) = f(\sin(u+v), \cos(u-v))$
   (4) $g(u,v) = f(e^{u^2}, \ln(u+v))$

22. O raio de um cilindro circular está decrescendo à taxa de 1,2cm/s enquanto sua altura está crescendo à taxa de 3cm/s. A que taxa o volume do cilindro está variando quando o raio vale 80 cm e a altura vale 150 cm?

23. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\nabla f(-2,-2) = (a,-4)$ e

$$g(t) = f(2t^3 - 4t, t^4 - 3t).$$

   Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = 2x+3$.

24. Seja $f = f(x,y)$ uma função de classe C^2 e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(u,v) = uf(u^2 - v, u + 2v)$.

   (a) Determine g_{uv} em função das derivadas parciais de f.

(b) Sabendo que $3x+5y=z+26$ é o plano tangente ao gráfico de f, $f_{xy}(1,4)=f_{xx}(1,4)=1$ e $f_{yy}(1,4)=-1$, calcule $g_{uv}(-2,3)$.

25. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável e admitamos que

$$\pi: 2x-3y-z=3$$

seja o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,-1,f(1,-1))$.

(a) Determine os valores de $f(1,-1)$, $\nabla f(1,-1)$ e $f_v(1,-1)$, onde $v=(5,-1)$.

(b) Considerando $g(u,v)\doteq \sin(uv)-f(u+v,v-e^{uv})$, determine $\nabla g(1,0)$.

(c) Considerando $\varphi(t)\doteq f(e^t+\sin(4t),t-e^{-t})$, determine $\varphi'(0)$.

26. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $(-3,2)$. Suponha que $f(-3,2)=1$ e que o plano

$$\pi: 3x-5y+2z=2014$$

seja paralelo ao plano tangente ao gráfico de f no ponto $(-3,2,1)$. Determine:

(a) $\nabla f(-3,2)$;

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial v}(-3,2)$, onde $v=(2,-1)$;

(c)

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\left\{3t+f(x(t),y(t))\right\}^2,$$

onde $x(t)=2e^{-t}-5\cos t+4t^2$ e $y(t)=t^5+t^3+6\ln(1+t)+\tan t+2$;

(d) $g_u(0,1)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial v}(0,1)$, onde $g(u,v)=f(u^4-3v,e^{2u}+v^2)$.

27. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável que admite o plano de equação

$$2x-6y+2z=7$$

como tangente ao seu gráfico no ponto $(3,-1,f(3,-1))$.

(a) Determine $f(3,-1)$, $\nabla f(3,-1)$ e $f_v(3,-1)$, onde $v=(-1,1)$

(b) Seja $g(t)=f(x(t),y(t))$, onde

$$x(t)=2^t-4\sin t+\cos t,\ \ y(t)=t^5-4t^4+6t\sin t-1.$$

Determine $g'(0)$.

(c) Seja

$$g(u,v)=\left\{u+f(3\cos u+\sin v, uv-e^{u+v})\right\}^2,\ (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

Determine $\nabla g(0,0)$.

28. Seja $F(r,s)=G(\mathrm{e}^{rs},r^3\cos(s))$, onde $G=G(x,y)$ é uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$.

(a) Calcule $F_{rr}(r,s)$ em função das derivadas parciais de G.

(b) Determine $F_{rr}(1,0)$ sabendo que $G_y(t^2+1, t+1) = t^2 - 2t + 3$.

29. Determine $c \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = \ln(x^2 + cy^2)$ no ponto $(2, 1, f(2, 1))$ seja perpendicular ao plano $3x + z = 0$.

30. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, tal que $2x + y + z = 7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 2, f(0, 2))$. Se

$$g(u, v) = u\, f\left(\operatorname{sen}(u^2 - v^3), 2u^2 v\right),$$

determine $a \in \mathbb{R}$ tal que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1, 1, g(1, 1))$ seja paralelo ao vetor $(4, 2, a)$.