

Lista 3

☆ Máximos e mínimos de funções de duas e três variáveis

1. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

- | | | |
|--|---|-----------------------------|
| (a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$ | (b) $z = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$ | (c) $z = x^2y^2$ |
| (d) $z = x^4 + xy + y^2 - 6x - 5y$ | (e) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ | (f) $z = y \cos x$ |
| (g) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$ | (h) $z = y^4 + 4x^2y - 4x^2 - 8y^2$ | (i) $z = xye^{-x^2-y^2}$ |
| (j) $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$ | (k) $z = (x-1)^3 + (y-2)^3 - 3x - 3y$ | (l) $z = x^3y^3$ |
| (m) $z = x^{-2} + y^{-1} + xy, x > 0, y > 0$ | (n) $z = \sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$ | (o) $z = x^4 + y^4 + x + y$ |

2. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D indicada.

- (a) $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$; D é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$
- (b) $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x \leq 0, y \geq 0\}$
- (c) $f(x, y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
- (d) $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3\}$.
- (e) $f(x, y) = (4x - x^2) \cos y$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$

3. Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f sujeita às restrições explicitadas:

- (a) $f(x, y) = xy$; $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$
- (b) $f(x, y, z) = xyz$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
- (c) $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- (d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x^4 + y^4 + z^4 = 1$

4. Encontre o máximo e o mínimo absolutos de $f(x, y)$ em D sendo:

- (a) $f(x, y) = xy$; $D = \{(x, y) : x^2 - y^2 = 1, x \in [1, 2]\}$
- (b) $f(x, y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x \in [0, 1/4], y \geq 0\}$

5. Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0,0)$.

6. Qual o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ que está mais próximo do ponto $(1, 1, 1)$?

7. Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.

8. Determine o ponto do plano $x + 2y - z = 4$ mais próximo da origem.

9. Considere a função $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ definida em $D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$. Determine o plano tangente ao gráfico de f que forma com o planos coordenados o tetraedro de volume mínimo.
10. Determine a distância entre as retas de equação
 $X = (-2, 3, -1) + \alpha(4, 1, 5)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X = (-1, 0, 3) + \mu(-2, 3, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$.
11. Determine o ponto do plano $3x + 2y + z = 12$ cuja soma dos quadrados das distâncias a $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$ seja mínima.
12. Seja $f(x, y) = a(x^2 + y^2) - 2xy$, onde a é uma constante.
- Verifique que, para todo $a \in \mathbb{R}$, o par $(0, 0)$ é um ponto crítico de f .
 - Para cada valor de a , classifique o ponto crítico $(0, 0)$ com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de a para os quais podemos afirmar que $(0, 0)$ é extremo global (absoluto) de f ?
13. Seja $b \neq 0$ e $f(x, y) = \frac{y^4}{4} + bx^2y - bx^2 - 2y^2$.
- Determine, em função de b , o número de pontos críticos de f e classifique-os.
 - Faça $b = 3$ e ache os extremos de f no triângulo (fronteira e interior) de vértices $(0, 0)$, $(3, 3)$ e $(-3, 3)$.
14. Determine o valor máximo e o valor mínimo de f em E sendo
- $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z$ e $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 56\}$
 - $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z + 3x$ e $E = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 4\}$
15. Encontre uma parametrização para C e use esta parametrização para encontrar, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em C , bem como os pontos onde estes valores são assumidos:
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$ e $f(x, y) = x^3y$.
 - $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \text{ e } z = 2y\}$ e $f(x, y, z) = x - z$.
 - $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$ e $f(x, y, z) = xz + y$.
 - $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \text{ e } x - y + 3z = 3\}$ e $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
16. Qual é o ponto da superfície $z^2 = xy + 1$ que está mais próximo da origem?
17. A temperatura num ponto (x, y, z) do espaço é dada por $T(x, y, z) = xy + yz$. Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ onde a temperatura é mais alta e onde é mais baixa. Justifique.
18. Determine as dimensões de um paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, $z > 0$.
19. Um pentágono de 12 cm de perímetro é construído colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo. Dentre esses pentágonos, determine as medidas dos lados daquele que tem área máxima.

20. Determine a equação do plano que passa por $(2, 2, 1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.
21. Dentre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ encontre aqueles mais distantes da origem.
22. Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27cm^2 de papelão.