UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM044 - Cálculo IV - 2026/1
Prof. Zeca Eidam

Lista 1

✰ Números complexos

1. Efetue as operações indicadas abaixo:

   (a) $(1+i)(1-i)$

   (b) $(3+2i)(5-i)(4-6i)$

   (c) $((1+2i)-(3-i))(-2-i)$

   (d) $\dfrac{1-i}{1+i}$

   (e) $\dfrac{(2-i)(2-5i)+(-1-i)}{3-2i}$

   (f) $\dfrac{1}{(1-i)(2+i)(-i)}$

   (g) $(1-i)^6(2+i)^3$

   (h) $\dfrac{1-i}{3-2i}+\dfrac{-2i}{7-i}$

   (i) $\dfrac{(3+i)^2(1-i)^3}{(-1+i)^2(1-i)^4}$

   (j) $(-1+\sqrt{3}i)^{12}(1+i)^{13}$

   (k) $\dfrac{1+2i}{1-2i}+\dfrac{1-i}{1+i}$

   (l) $\dfrac{(1+2i)^3(2-i)^2}{(-1-i)^3(1-i)^2}$

   (m) $(-1-i)^{2025}+(-1+i)^{2025}$

   (n) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^{1013}}{(1+i)^{2026}}\right)$

   (o) $1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{2026}$

2. Calcule as potências indicadas abaixo:

   (a) $(1+i)^{75}$

   (b) $(2-2i)^{17}$

   (c) $(1-i)^{16}$

   (d) $(-1+i)^{1977}$

   (e) $(\sqrt{3}+i)^{2026}$

   (f) $(-1+\sqrt{3}i)^{2008}$

3. Determine as raízes quadradas do número $a+bi$, com $a,b\in\mathbb{R}$.

4. Determine todas as raízes da equação $z^4+az^2+b=0$, para $a,b\in\mathbb{R}$.

5. Determine todos os números $z\in\mathbb{C}$ tais que $z^n=w$ (raízes n-ésimas de w) para os valores abaixo de n e w:

   ① $n=2,\ w=-1$

   ② $n=3,\ w=8i$

   ③ $n=2,\ w=i$

   ④ $n=3,\ w=2i$

   ⑤ $n=3,\ w=1+i$

   ⑥ $n=4,\ w=1-i$

6. Fatore os polinômios abaixo em termos das suas raízes (reais ou complexas):

① $p(x) = x^2 + 1$

② $p(x) = x^3 + x^2 + x$

③ $p(x) = x^3 + x - 2$

④ $p(x) = x^3 + 1$

⑤ $p(x) = x^4 + 1$

⑥ $p(x) = x^4 + 4$

7. Verifique que as afirmações abaixo são verdadeiras para todos $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $|z|^2 = \mathrm{Re}\,(z)^2 + \mathrm{Im}\,(z)^2$

(b) $|\mathrm{Re}\,(z)| \le |z|$

(c) $|\mathrm{Im}\,(z)| \le |z|$

(d) $|z| = |\overline{z}|$

(e) $||z| - |w|| \le |z \pm w| \le |z| + |w|$

(f) $|zw| = |z||w|$

(g) $\mathrm{Re}\,(zw) = \mathrm{Re}\,z\,\mathrm{Re}\,w - \mathrm{Im}\,z\,\mathrm{Im}\,w$

(h) $\mathrm{Im}\,(zw) = \mathrm{Re}\,z\,\mathrm{Im}\,w + \mathrm{Im}\,z\,\mathrm{Re}\,w$

(i) $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

(j) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

(k) $\overline{zw} = \overline{zw}$

(l) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

(m) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$

(n) $1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \dfrac{1 - z^{n-1}}{1 - z}$

(o) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

(p) $\mathrm{Re}\,(z \pm w) = \mathrm{Re}\,z \pm \mathrm{Re}\,w$

(q) $\mathrm{Re}\,(iz) = -\mathrm{Im}\,z$

(r) $\mathrm{Im}\,(iz) = \mathrm{Re}\,z$

(s) $\mathrm{Im}\,(z \pm w) = \mathrm{Im}\,z \pm \mathrm{Im}\,w$

(t) $\mathrm{Re}\,z = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$

(u) $\mathrm{Im}\,z = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$

(v) $|z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}\,z\overline{w} + |w|^2$

(w) $|\mathrm{Re}\,z| + |\mathrm{Im}\,z| \le \sqrt{2}|z|$

(x) $|zw| \le \dfrac{1}{2}\left(|z|^2 + |w|^2\right)$

(y) $\mathrm{Re}\,(z^2) = (\mathrm{Re}\,z)^2 - (\mathrm{Im}\,z)^2$

(z) $\mathrm{Im}\,(z^2) = 2\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{Im}\,z$

8. Verifique que se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$, então as igualdades abaixo são verdadeiras:

① $\mathrm{Re}\,(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}\,z$

② $\mathrm{Im}\,(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}\,z$

③ Se $\mathrm{Re}\,(zw) = \mathrm{Re}\,(z)\,\mathrm{Re}\,(w)$ então pelo menos um dos números z ou w é real.

④ Se $\mathrm{Im}\,(zw) = \mathrm{Re}\,(z)\mathrm{Im}\,(w)$ então $z \in \mathbb{R}$ ou $w = i\lambda$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

⑤ $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{\mathrm{Re}\,z}{|z|^2}$, se $z \neq 0$

⑥ $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\dfrac{\mathrm{Im}\,z}{|z|^2}$, se $z \neq 0$

⑦ $\mathrm{Re}\,(z)\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = 1 + \mathrm{Im}\,(z)\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)$, se $z \neq 0$

⑧ $\dfrac{\mathrm{Re}\,(z)}{\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)} + \dfrac{\mathrm{Im}\,z}{\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)} = 0$, se $z \neq 0$

9. Uma propriedade essencial da relação de ordem $\ge$ no conjunto $\mathbb{R}$ é o fato que $x^2 \ge 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Verifique que não é possível introduzir uma ordem $\ge$ em $\mathbb{C}$ que possua esta mesma propriedade.

10. Verifique que as afirmações abaixo são todas equivalentes a respeito de um número $z \in \mathbb{C}$:

① $z \in \mathbb{R}$;

② $z = \operatorname{Re} z$;

③ $\operatorname{Im} z = 0$;

④ $|z| = |\operatorname{Re} z|$.

11. Verifique que, se $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 1$, é uma raiz n-ésima da unidade então

$$1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} = 0$$

12. Dados $z, w \in \mathbb{C}$, verifique que:

① $\operatorname{Re}(z\overline{w}) = |z||w|$ se e só se $\arg(z) - \arg(w) = 2k\pi$ para algum inteiro k.

② $|z + w| = |z| + |w|$ se e só se $\arg(z) - \arg(w) = 2k\pi$ para algum inteiro k.

③ $|z - w| = ||z| - |w||$ se e só se $\arg(z) - \arg(w) = 2k\pi$ para algum inteiro k.

13. Aplicando a identidade

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

ao número $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \in \mathbb{C}$, com $\theta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, prove as identidades abaixo:

① $1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

② $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 2\theta + \ldots + \operatorname{sen} n\theta = \dfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \dfrac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

14. Faça um esboço gráfico das regiões abaixo descritas e as classifique em aberta/fechada, limitada/ilimitada, conexa/desconexa:

(a) $D = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1\}$

(b) $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 1\}$

(c) $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \leq 3\}$

(d) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3 + i| < 2\}$

(e) $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z \leq \pi/6\}$

(f) $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) > 0\}$

(g) $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) \leq 1\}$

(h) $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) = -4\}$

(i) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| > |z|\}$

(j) $D = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \leq 1\right\}$

(k) $D = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right| = \alpha\right\}$, com $\alpha > 0$

✰ Funções complexas

15. Determine a parte real e a parte imaginária de cada uma das funções abaixo:

① $f(z) = z^2$

② $f(z) = z^2\overline{z} - 1$

③ $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$

④ $f(z) = (\overline{z - i})^3$

⑤ $f(z) = \dfrac{z}{z-1} + \dfrac{1}{z}$

⑥ $f(z) = (z-1)\overline{(z+2)}$

16. Determine os limites abaixo, se existirem:

(a) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{|z|}{z}$

(b) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z}{\overline{z}}$

(c) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{|z|^2}{\overline{z}}$

(d) $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{z^2-1}{z-1}$

(e) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(|z|)}{z}$

(f) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^2-(i+1)z+i}{z^2+1}$

(g) $\lim\limits_{z\to \infty} \dfrac{3z^2+1-\cos(|z|)}{2z^2-\ln(1+|z|)}$

(h) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1-z}{\overline{z}}$

(i) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{(\operatorname{Re} z)^2}{|z|}$

(j) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|}$

(k) $\lim\limits_{z\to \infty} \dfrac{2z^5-3z^4-2z+1}{z^3+z^2-1}$

(l) $\lim\limits_{z\to \infty} \dfrac{4z^3+2z^4+5}{z^4-z^2-3}$

17. Verifique que as funções abaixo não são diferenciáveis (no sentido complexo) em nenhum ponto:

① $f(z) = \overline{z}$

② $f(z) = \operatorname{Re} z$

③ $f(z) = \operatorname{Im} z$

18. Dentre as funções abaixo, somente uma é diferenciável (no sentido complexo) em todos os pontos de seu domínio. Qual delas? Justifique sua resposta.

① $f_1(z) = z^3\overline{z}^2 + \operatorname{Re} z$

② $f_2(z) = \dfrac{2z+3}{z^2-1}$

③ $f_3(z) = \arctan(e^{y-5} + 4\operatorname{sen} y) + i\left(e^{3x^2y+1} + 4x^5y^6\right)$, $z = x+iy$

19. Determine as expressões para as derivadas das funções abaixo em todos os pontos de seu domínio:

① $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$

② $f(z) = 3z^2-2z-1$

③ $f(z) = \dfrac{z^2+z-1}{1+z^2}$

④ $f(z) = \dfrac{2z^3-3z+2}{z^2+1}$

20. Verifique que a função $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dada por $f(z) = \sqrt{|x||y|}$, $z = x+iy$, satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em $z=0$ mas *não* é diferenciável (no sentido complexo) neste ponto.

21. Verifique se as funções a seguir possuem derivada *no sentido complexo* nos pontos de seu domínio. Determine o valor da derivada, quando existir:

① $f(z) = \overline{z}$

② $f(z) = z - \overline{z}$

③ $f(z) = 2x + ixy^2$, $z = x+iy$

④ $f(z) = x + 2y + ixy^2$, $z = x+iy$

⑤ $f(z) = e^x\cos y + ie^x\operatorname{sen} y$, $z = x+iy$

⑥ $f(z) = x^2 + iy^2$, $z = x+iy$

⑦ $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$

⑧ $f(z) = \dfrac{1}{z^n}$

⑨ $f(z) = z\,\mathrm{Im}\, z$

22. Consideremos em $\mathbb{R}^2$ o sistema usual de coordenadas polares (r, θ) dado por

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Assim, uma função $u = u(x, y)$ pode ser pensada também como função das variáveis (r, θ) por meio da expressão $u = u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Neste exercício, vamos verificar como ficam as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares.

① Usando a regra da cadeia, verifique que $u_r = u_x \cos\theta + u_y \mathrm{sen}\,\theta$ e $u_\theta = -r\,u_x \mathrm{sen}\,\theta + r\,u_y \cos\theta$.

② Resolvendo para u_x e u_y o sistema linear formado pelas duas equações acima, verifique que $u_x = u_r \cos\theta - \dfrac{1}{r} u_\theta \mathrm{sen}\,\theta$ e $u_y = u_r \mathrm{sen}\,\theta + \dfrac{1}{r} u_\theta \cos\theta$.

③ Admitindo que uma função complexa $f = u + i\,v$ satisfaça as equações de Cauchy-Riemann ($u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$), verifique que

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \ \text{ e } \ v_r = -\frac{1}{r} u_\theta\,.$$

Estas são as *equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares.*

23. Consideremos a função

$$f(z) = z^{1/2},$$

definida como $f(z) = r^{1/2}(\cos(\theta/2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta/2))$ para todo $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, no domínio $D = \{z \in \mathbb{C} : r > 0\,, 0 < \theta < 2\pi\}$. Usando o exercício anterior, verifique que f possui derivada em todos os pontos de D e

$$f'(z) = \frac{1}{2f(z)}\,.$$

24. Faça o mesmo procedimento do exercício anterior para a função $f(z) = z^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

25. Seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável, com D conexo. Verifique que as seguinte afirmações são verdadeiras:

① Se $\mathrm{Re}\, f$ é constante então f é constante.

② Se $\mathrm{Im}\, f$ é constante então f é constante.

③ Se $|f|$ é constante então f é constante.

④ Se $\overline{f}$ é diferenciável então f é constante.

⑤ Se $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$ então f é constante.

⑥ Se $D = \mathbb{C}$, então a função g dada por $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ é diferenciável.

26. Seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável e $z_0 = x_0 + i\,y_0 \in D$. Verifique que

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i\,v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - i\,u_y(x_0, y_0)\,.$$

✰ Funções harmônicas

27. Uma função $\varphi : D \to \mathbb{R}$ é de *classe* C^2 se existirem e forem contínuas em D as derivadas parciais de φ até segunda ordem, i.e., se existirem e forem contínuas em D as funções φ_x, φ_y e $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$. Uma tal função é dita *harmônica* em D se satisfizer a equação de Laplace

$$\Delta\varphi \doteq \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0\,.$$

Verifique que se f é uma função diferenciável em D então as partes real e imaginária de f são funções harmônicas em D.

28. Dadas duas funções harmônicas $u, v : D \to \mathbb{R}$, dizemos que estas são *conjugadas* se existir uma $f : D \to \mathbb{C}$ diferenciável (complexa) tal que $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$. Verifique que as funções abaixo são harmônicas e encontre uma conjugada harmônica para cada uma:

① $u(x, y) = 2x(1 - y)$

② $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

③ $u(x, y) = \sinh x \operatorname{sen} y$

④ $u(x, y) = \operatorname{sen} x \cosh y$

⑤ $u(x, y) = x^2 - y^2 - x$

⑥ $u(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$

⑦ $u(x, y) = x^3 + 2x - 3xy^2$

29. Verifique que se u, v são conjugadas harmônicas, então $(-v, u)$, $(-u, v)$ e (v, u) são pares de funções conjugadas harmônicas. Verifique também que $v + c$ é conjugada harmônica de u, para qualquer constante $c \in \mathbb{C}$.

30. Determine uma conjugada harmônica v para a função $u(x, y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$, $(x, y) \neq (0, 0)$ no *maior domínio possível* D. É possível construir v em todo o domínio $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$?

31. Verifique que se $u : D \to \mathbb{C}$ é uma função harmônica e D é um retângulo ou um disco, então é possível construir uma conjugada harmônica $v : D \to \mathbb{C}$ para u. Constraste este resultado com o exercício anterior. Existem outros tipos de domínio D nos quais o resultado continua verdadeiro?

32. Neste exercício, vamos determinar o operador de Laplace em coordenadas polares. Para isso, seja $u = u(x, y)$ uma função em D e consideremos em D o sistema de coordenadas polares usual (r, θ). (Veja o exercício (22)).

① Derive novamente as expressões obtidas no primeiro item do exercício (22) e conclua que

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r}u_r + u_{rr}\,.$$

② Use o item anterior para mostrar que se u é uma função harmônica *radial*, i.e., que só depende da variável r, então existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$u(x,y) = a\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + b.$$

33. Sejam u, v são conjugadas harmônicas. Verifique que as curvas de nível de u e v se intersectam *ortogonalmente* nos pontos onde $f = u + iv$ tem derivada não nula.

34. Verifique o fato descrito no ítem anterior para $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$ nos seguintes casos:

① $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$

② $f(z) = z^2$

③ $f(z) = \dfrac{1}{z}$