**UFPR - Universidade Federal do Paraná**
**Setor de Ciências Exatas**
**Departamento de Matemática**
**CM044 - Cálculo IV - 2026/1**
**Prof. Zeca Eidam**

# Lista 2

## ✰ Funções elementares

1. Prove as seguintes afirmações:

   ① $e^{\pi i} + 1 = 0$
   ② $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} > 0$, $z \in \mathbb{C}$
   ③ $e^z \in \mathbb{R}$ se e só se $\operatorname{Im} z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
   ④ $e^z \in i\mathbb{R}$ se e só se $\operatorname{Im} z = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
   ⑤ $e^z = 1$ se e só se $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$
   ⑥ $e^z = e^w$ se e só se $z = w + 2k\pi i$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.
   ⑦ $\lim_{\operatorname{Re} z \to -\infty} e^z = 0$

2. Determine todos os valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que:

   ① $e^z = -2$
   ② $e^z = i$
   ③ $e^z = 1 + i\sqrt{3}$
   ④ $e^{2z-1} = 1$
   ⑤ $e^{z^2} = 1$
   ⑥ $e^{z^2-2z} = i$

3. Mostre que:

   1. $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$
   2. $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \sinh^2 y$, $z = x + iy$
   3. $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$, $z = x + iy$
   4. $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cos z$
   5. $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$
   6. $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$
   7. $\cos(-z) = \cos z$
   8. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$
   9. $\operatorname{sen} z = 0$ se e só se $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$
   10. $\cos z = 0$ se e só se $z = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$
   11. $|\sinh y| \le |\operatorname{sen} z| \le \cosh y$, se $z = x + iy$
   12. $|\sinh y| \le |\cos z| \le \cosh y$, se $z = x + iy$
   13. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
   14. $|\operatorname{sen} x| \le |\operatorname{sen} z|$, se $z = x + iy$
   15. $|\cos x| \le |\cos z|$, se $z = x + iy$
   16. $|\sinh x| \le |\cosh z| \le \cosh x$, se $z = x + iy$
   17. $\operatorname{sen}(z+w)\operatorname{sen}(z-w) = \dfrac{1}{2}(\cos(2w) - \cos(2z))$
   18. $\cos(z+w)\cos(z-w) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(2w) - \operatorname{sen}(2z))$
   19. $\cos z = \cos w$ se e só se $z \pm w = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
   20. $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} w$ se e só se $z - w = 2k\pi$ ou $z + w = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
   21. $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \operatorname{sen}^2 y$
   22. $|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$
   23. $\sinh(iz) = i \operatorname{sen} z$
   24. $\cosh(iz) = \cos z$
   25. $\operatorname{sen}(iz) = i \sinh z$
   26. $\cos(iz) = \cosh z$
   27. $\sinh(z + \pi i) = -\sinh z$
   28. $\cosh(z + \pi i) = -\cosh z$
   29. $\tanh(z + \pi i) = \tanh z$

4. Determine todos os valores de $z \in \mathbb{C}$ que satisfazem as equações:

① $\cos z = 1$
② $\cos z = 3$
③ $\operatorname{sen} z = 4$
④ $\cos z = i$
⑤ $\cosh z = 1/2$
⑥ $\sinh z = i$
⑦ $\cosh z = -1$
⑧ $\sinh z = 0$
⑨ $\cosh z = 0$
⑩ $\tanh z = 0$

5. Prove as identidades abaixo, para $z, w \in \mathbb{C}$ e $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $\sinh(z+w) = \sinh z \cosh w + \sinh w \cosh z$
2. $\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh w \sinh z$
3. $\sinh(-z) = -\sinh z$
4. $\cosh(-z) = \cosh z$
5. $\cosh(2z) = \cosh^2 z + \sinh^2 z$
6. $\sinh(2z) = 2\sinh z \cosh z$
7. $\sinh(x+iy) = \sinh x \cos y + i \operatorname{sen} y \cosh x$
8. $\cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \operatorname{sen} y$
9. $\sinh z = 0$ se e só se $z = k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$
10. $\cosh z = 0$ se e só se $z = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$
11. $\sinh(z+w)\sinh(z-w) = \dfrac{1}{2}(\cosh(2z) - \cosh(2w))$
12. $\sinh(z-w)\cosh(z+w) = \dfrac{1}{2}(\sinh(2z) - \sinh(2w))$
13. $\cosh z = \cosh w$ se e só se $z \pm w = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$
14. $\sinh z = \sinh w$ se e só se $z - w = 2k\pi i$ ou $z + w = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$
15. $\cosh(2z) = \cosh^2 z + \sinh^2 z$
16. $\sinh(2z) = 2\sinh z \cosh z$

### ✰ Função logaritmo

6. Determine os valores de:

① $\log 1$
② $\log(-2)$
③ $\log i$
④ $\log(-i)$
⑤ $\log((-1)^{1/3})$
⑥ $\log(1+i)$
⑦ $\log(ei)$
⑧ $\log(\sqrt{3}+i)$
⑨ $\log(\sqrt{3}-i)$
⑩ $\log(1-i)$

7. Determine os valores de:

① $e^i$
② $2^i$
③ $(1-i)^{5i}$
④ $(1+i)^{2i+3}$
⑤ $i^{-4i}$
⑥ $2^{1+i}$
⑦ $(-1)^{\sqrt{2}}$
⑧ $(-1)^{1/\pi}$

8. Sejam $a, b, z \in \mathbb{C}$, com $z \neq 0$. Considerando os valores principais das potências envolvidas, mostre as igualdades abaixo:

① $z^{a+b} = z^a \cdot z^b$

② $\dfrac{1}{z^a} = z^{-a}$

③ $\dfrac{z^a}{z^b} = z^{a-b}$

④ $(z^a)^b = z^{ab}$

9. Calcule a derivada das funções abaixo:

① $f(z) = \dfrac{2^z - \operatorname{sen} z}{\cos(z^2) + \sinh z}$

② $f(z) = e^{-z^2 + \cos z} \tanh z$

③ $f(z) = z^z$

④ $f(z) = \log\left(\dfrac{1+z^z}{1-z^2}\right)$

⑤ $f(z) = z^{\operatorname{sen} z} - (\operatorname{sen} z)^z$

⑥ $f(z) = \dfrac{z^2 - e^{2z}}{\operatorname{sech} z + \pi}$

**✰ Funções trigonométricas inversas**

10. Mostre que as funções multivalentes abaixo verificam as identidades indicadas:

① $\arcsin z = -i \log\left(iz + (1-z^2)^{1/2}\right)$

② $\arccos z = -i \log\left(z + (z^2-1)^{1/2}\right)$

③ $\arctan z = \dfrac{1}{2} \log\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)$

11. Use as expressões do exercício (10) para resolver as equações abaixo:

① $\cos z = 3$

② $\operatorname{sen} z = i$

③ $\operatorname{tg} z = 2$

12. Encontre expressões explícitas (como no exercício anterior) para as funções multivalentes a seguir:

① $f(z) = \operatorname{arcsec} z$

② $f(z) = \operatorname{arccotg} z$

③ $f(z) = \operatorname{arccosec} z$

13. Determine as derivadas das funções definidas nos exercícios (10) e (12).

14. Determine os valores de:

① $\arctan(2i)$

② $\arctan(1+i)$

③ $\operatorname{arctanh}(i)$

④ $\operatorname{arccosh}(-1)$

⑤ $\operatorname{arctanh}(0)$

15. Determine expressões explícitas (como as do exercício (10)) para as funções trigonométricas hiperbólicas inversas abaixo:

① $f(z) = \operatorname{arcsinh} z$

② $f(z) = \operatorname{arccosh} z$

③ $f(z) = \operatorname{arctanh} z$

④ $f(z) = \operatorname{arcsech} z$

⑤ $f(z) = \operatorname{arccoth} z$

⑥ $f(z) = \operatorname{arccosech} z$

**✰ Integrais de linha de funções complexas**

16. Determine o valor de $\int_\gamma f(z)dz$ em cada um dos casos abaixo:

   1. $f(z) = z^2 + 1$ e $\gamma$ é o segmento de reta que une 0 e $1+i$
   2. $f(z) = z^2 + 1$ e $\gamma$ é a reunião dos segmentos de reta unindo 0, 1 e 1, $1+i$
   3. $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$ e $\gamma$ é o círculo de centro na origem e raio 3 orientado no sentido anti-horário.
   4. $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$ e $\gamma$ é a porção do círculo de centro na origem e raio 1 contida no semiplano superior, orientada no sentido anti-horário.
   5. $f(z) = e^z$ e $\gamma$ é o segmento de reta unindo $\pi i$ e 1.
   6. $f(z) = e^z$ e $\gamma$ é a fronteira do quadrado $[-1,1]\times[-1,1]$ orientada no sentido horário.
   7. $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ e $\gamma$ é qualquer curva que não passa pela origem e une os pontos $z_1$ e $z_2$ (ambos não nulos)
   8. $f(z) = z\,\mathrm{sen}(z^2)$ e $\gamma$ é a curva $\gamma(t) = (1+t^2) + (e^t i)$, $0 \le t \le 1$
   9. $f(z) = e^{z+2}$ onde $\gamma$ é o semicírculo $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \le t \le \pi$
   10. $f(z) = z^4 + 3z^3 - z + \mathrm{sen}\, z$ onde $\gamma$ é a curva $\gamma(t) = \cos(t^2) + i(\mathrm{sen}(t^2)+1)$, $0 \le t \le 1$

17. Use o Teorema de Cauchy-Goursat para mostrar que as integrais abaixo são nulas (em todos os itens, $\gamma$ é a circunferência de centro na origem e raio 1 orientada no sentido anti-horário):

18. $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{z-5}dz$

19. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{sen}\, z - e^{z^2}}{z^2+3}dz$

20. $\displaystyle\int_\gamma z\cosh(z^2+1)dz$

21. $\displaystyle\int_\gamma \frac{5z^3+z+2}{z^2-4}dz$

22. Se $\gamma$ é uma curva orientada no sentido anti-horário que delimita uma região que contém em seu interior a origem, mostre que $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$.

✰ **Fórmula integral de Cauchy**

23. Seja $\gamma$ uma parametrização positivamente orientada do círculo $|z| = 3$ e suponhamos que

$$f(z) = \int_\gamma \frac{2w^3 - 4w - 1}{w - z} dw$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| \neq 3$. Determine os valores de $f(2)$ e $f(z)$ para $z \in \mathbb{C}$ com $|z| > 3$.

24. Seja $D$ uma região em $\mathbb{C}$ cuja fronteira é parametrizada pela curva simples $\gamma$, orientada no sentido anti-horário e consideremos a função $g$

$$g(z) = \int_\gamma \frac{w^3 + 3w - 1}{w - z} dw$$

definida em todo $\mathbb{C}$, exceto sobre os pontos da fronteira de $D$.

① Mostre que $g(z) = 0$ se $w \notin D$.

② Mostre que $g(z) = 6\pi i z$ se $z$ pertence ao interior da região $D$.

25. Determine $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 4z + 3}$ para as seguintes curvas $\gamma$:

① $\gamma$ é a circunferência $|z| = 4$ orientada no sentido horário.

② $\gamma$ é a circunferência $|z| = 2$ orientada no sentido anti-horário.

③ $\gamma$ é a circunferência $|z - 4| = 2$ orientada no sentido anti-horário.

26. Determine $\displaystyle\int_\gamma \frac{(4z + 1)dz}{(z^2 + 25)(z^2 - 4z + 3)}$ para as seguintes curvas $\gamma$:

① $\gamma$ é a circunferência $|z| = 4$ orientada no sentido horário.

② $\gamma$ é a circunferência $|z| = 2$ orientada no sentido anti-horário.

③ $\gamma$ é a circunferência $|z - 4| = 2$ orientada no sentido anti-horário.

27. Seja $\gamma$ a parametrização da fronteira do quadrado $Q$ cujos lados estão sobre as retas $\operatorname{Re} z = \pm 2$ e $\operatorname{Im} z = \pm 2$ orientado no sentido anti-horário. Calcule as integrais a seguir:

① $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z - \pi i/2} dz$

② $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2 + 8)} dz$

③ $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{2z + 1} dz$

④ $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{tg}(z/2)}{(z - i)^2} dz$

⑤ $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sinh z}{z^4} dz$

⑥ $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z^n} dz$, $n \in \mathbb{N}$

28. Calcule as seguintes integrais de linha:

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-\pi/2)^2}dz$ onde $\gamma$ é a circunferência $|z|=2$ orientado no sentido anti-horário
2. $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z-2)}dz$ onde $\gamma$ é a circunferência $|z|=3$ orientado no sentido anti-horário
3. $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^n}{(z-a)^{n+1}}dz$ onde $\gamma$ é a circunferência $|z|=2$ orientado no sentido anti-horário
4. $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+1}{(z-2)^3}dz$ onde $\gamma$ é a circunferência $|z-2|=1$ orientado no sentido anti-horário
5. $\displaystyle\int_\gamma \frac{2z^3+z^2+4}{z^4+4z}dz$ onde $\gamma$ é a circunferência $|z-2|=4$ orientado no sentido anti-horário
6. $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{Re}\,(z^2)dz$ onde $\gamma$ é a fronteira do triângulo de vértices 0, 2 e $2+i$ orientada no sentido anti-horário
7. $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^2-1}dz$ onde $\gamma$ é a curva obtida a partir da reunião das circunferências de raio 1 e centro nos pontos $z=1$ e $z=-1$, sendo a primeira delas percorrida no sentido anti-horário e a segunda percorrida no sentido horário.
8. $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{Re}\,(z)dz$ onde $\gamma$ é a semi-circunferência superior de raio 1 e centro na origem, orientada no sentido de 1 para $-1$
9. $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+4}$ onde $\gamma$ é a elipse de equação $x^2+4(y-2)^2=4$ orientada no sentido anti-horário.
10. $\displaystyle\int_\gamma \frac{2-\operatorname{sen} z}{z^2-z}$ onde $\gamma$ é a fronteira do retângulo de vértices nos pontos $2+2i$, $-2+2i$, $-2-2i$ e $2-2i$ orientada no sentido anti-horário.
11. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z^3}$ onde $\gamma$ é a fronteira do quadrado delimitado pelas retas $\mathrm{Re}\,z=\pm1$ e $\mathrm{Im}\,z=\pm1$ orientada no sentido anti-horário.
12. $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^3+\operatorname{sen} z}{(z-i)^3}$ onde $\gamma$ é a fronteira do triângulo de vértices nos pontos $\pm2$ e $2i$, orientada no sentido anti-horário.
13. $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z(z-2i)^2}$ onde $\gamma$ é a fronteira do quadrado de vértices nos pontos $\pm3$, $\pm3i$, orientada no sentido anti-horário.

29. Dado $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq-1$, mostre que $\displaystyle\int_\gamma z^n dz=0$, onde $\gamma$ é uma curva fechada qualquer que não passa pela origem.

30. Seja $\gamma$ a circunferência $|z-i|=2$ orientada no sentido anti-horário. Determine:

① $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+4}dz$ ② $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+4)^2}dz$

31. Seja $\gamma$ a circunferência $|z|=2$ orientada no sentido anti-horário. Determine $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ nos seguintes casos:

① $f(z) = \dfrac{5}{z^{1975}} + \dfrac{2008}{z^{1977}} - \dfrac{16}{z-1/2} + z^{2013}$

② $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{|z|}$

③ $f(z) = \dfrac{3z+5}{z^2+z}$

④ $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+z}$

32. Calcule:

① $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{\overline{z}}{|z|} dz$ onde $\gamma_R$ é a circunferência de centro na origem e raio $R > 0$ orientada positivamente.

② $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{\overline{z}}{z} dz$ onde $\gamma$ é a reunião das semi-circunferências superiores de centro na origem e raios $R_2 > 0$ e $R_1 > R_2$ com os segmentos de reta unindo os pontos $-R_1, -R_2$ e $R_2, R_1$, orientada no sentido anti-horário.

33. Dados números reais $a, b > 0$, considere a *elipse* de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

① Encontre uma parametrização $\gamma$ desta curva no sentido anti-horário.

② Calculando a integral $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$, mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2 \mathrm{sen}^2\theta} = \frac{2\pi}{ab}\,.$$

34. Calcule $\displaystyle\int_{\gamma} \mathrm{Im}\,(z^2)\,dz$ nos seguintes casos:

① $\gamma$ é o segmento de reta unindo 0 a $2+4i$;

② $\gamma$ é a parábola $y = x^2$ entre os pontos 0 e $2+4i$.

O que podemos concluir sobre a função $f(z) = \mathrm{Im}\,(z^2)$?

35. Sejam $D$ uma região fechada em $\mathbb{C}$ cuja fronteira é parametrizada pela curva simples $\gamma$, orientada no sentido anti-horário e $f$ uma função analítica definida em um aberto contendo $D$

① Se $w \notin D$, mostre que $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz = 0$.

② Se $w$ não pertence à fronteira de $D$ então $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{z-w} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz$.

③ Generalize a fórmula acima, obtendo $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{f^{(n)}(z)}{z-w} dz = n! \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^n} dz$.

36. Seja $\gamma$ uma curva fechada simples, $D$ a região fechada delimitada por $\gamma$ e $z_1, z_2$ pontos distintos no interior de $D$.

① Dada qualquer $f$ analítica num aberto contendo $D$, mostre que

$$f(z_1) = f(z_2) + \frac{z_1 - z_2}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} dz.$$

② Usando a identidade do item anterior, é possível construir uma prova do teorema de Liouville, nas seguintes linhas.

Dada $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que $|f(z)| \le M$, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| \le R$, tomando $z_1 = z$, $z_0 = 0$ e $\gamma = \gamma_{R'}$ a circunferência de centro na origem e raio $R' > R$ orientada no sentido anti-horário, tem-se

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{2\pi i} \int_{\gamma_{R'}} \frac{f(w)}{(w - z)\, w} dw,$$

portanto,

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(0)| &= \left| \frac{z}{2\pi i} \int_{\gamma_{R'}} \frac{f(w)}{(w - z)\, w} dw \right| \\
&\le \frac{|z|}{2\pi} \int_{\gamma_{R'}} \frac{|f(w)|}{|w - z||w|} |dw| \\
&\le \frac{R}{2\pi} \int_{\gamma_{R'}} \frac{M}{(R' - R) \cdot R'} |dw| \\
&= \frac{R}{2\pi} \cdot \frac{M}{(R' - R) \cdot R'} \cdot (2\pi R') = M \frac{R}{R' - R} \to 0, \text{ se } R' \to 0.
\end{aligned}$$

37. Sejam $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 \le \operatorname{Re} z \le 2\pi,\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 1\}$ e $f(z) = \operatorname{sen} z$. Determine o valor máximo de $|f|$ em $D$ e o(s) ponto(s) onde este valor é assumido.

38. Se $D$ é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{C}$, determine em que pontos de $D$ a função $|f|$ assume seu valor máximo, onde $f(z) = e^z$.

39. Determine os pontos de máximo e mínimo para $|f|$ em $D$, onde $f(z) = (z + 1)^2$ e $D$ é o triângulo com vértices nos pontos $z = 0$, $z = 2$ e $z = i$.

40. (Teorema do módulo máximo para funções harmônicas) Seja $u : U \to \mathbb{R}$ uma função harmônica em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Mostre que se $(x_0, y_0) \in U$ é tal que $u(x_0, y_0) \ge u(x, y)$ para todo $(x, y) \in U$ então $u$ é constante. (Dica: se $v$ é uma conjugada harmônica para $u$, aplique o teorema do módulo máximo à função analítica $e^f$, onde $f = u + iv$.)

41. Neste exercício, vamos enunciar um resultado análogo o teorema do módulo máximo para pontos de mínimo de uma função analítica.

   ① Mostre que se $f(z) = z$, $z \in D$, com $D$ o disco unitário, então $|f(0)| = 0 \le |f(z)|$ para todo $z \in D$. Isso mostra que os pontos de mínimo de $|f|$ em $D$ podem ser interiores a $D$ sem que necessariamente $f$ seja constante.

   ② Seja $f$ uma função analítica em um aberto contendo o conjunto fechado e limitado $D$ e suponhamos que $f(z) \ne 0$ para todo $z \in D$. Mostre que os pontos de mínimo de $|f|$ pertencem à fronteira de $D$.