

Lista 3

☆ Séries de potências

1. Determine as séries de Maclaurin das funções abaixo:

(a)  $f(z) = e^z$

(b)  $f(z) = e^{z^2}$

(c)  $f(z) = \operatorname{sen} z$

(d)  $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$

(e)  $f(z) = \cos z$

(f)  $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$

(g)  $f(z) = \sinh z$

(h)  $f(z) = \cosh z$

(i)  $f(z) = z \cosh(z^2)$

(j)  $f(z) = \operatorname{sen}^2 z$

(k)  $f(z) = \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}$

(l)  $f(z) = \frac{1}{1 - z^2}$

(m)  $f(z) = \frac{\sinh z}{z}$

(n)  $f(z) = \sec z = \frac{1}{\cos z}$

2. Obtenha a série de Laurent de cada  $f$  a seguir no domínio  $D$  indicado:

(a)  $f(z) = \frac{z+1}{z-1}, D: |z| > 1$

(b)  $f(z) = \frac{\sinh z}{z^2}, D: |z| > 0$

(c)  $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}, D: |z| > 1$

(d)  $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3}, D: |z| > 0$

(e)  $f(z) = \frac{e^{1/z}}{z^2}, D: |z| > 0$

(f)  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}, D: 0 < |z| < 1$

(g)  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}, D: |z| > 1$

(h)  $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}, D: 1 < |z| < 2$

(i)  $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}, D: |z| > 2$

(j)  $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}, D: 0 < |z| < 1$

(k)  $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}, D: |z| > 1$

(l)  $f(z) = \operatorname{cosech} z = \frac{1}{\sinh z}, D: 0 < |z| < \pi$

3. Considere  $f(z) = \sinh(z^2), z \in \mathbb{C}$ .

① Obtenha a série de Maclaurin de  $f$ .

② Mostre que  $f^{(n)}(0) = 0$  para todo  $n$  ímpar e  $f^{(m)}(0) = 0$  para todo  $m$  múltiplo de 4.

4. Obtenha os primeiros termos das séries de Taylor/Laurent das funções abaixo (em torno da origem):

- (a)  $\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \frac{1}{3!}z + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{(3!)^2}\right)z^3 + \dots = \frac{1}{z} + \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + \frac{31}{15120}z^5 + \dots, 0 < |z| < \pi$
- (b)  $\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}z - \frac{1}{720}z^3 + \dots, 0 < |z| < 2\pi$
- (c)  $\operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3}z^3 - \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots, |z| < \pi/2$
- (d)  $\operatorname{sec} z = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{24}z^4 + \frac{61}{720}z^6 + \dots, |z| < \pi/2$
- (e)  $\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 + \dots, 0 < |z| < \pi$

### ☆ Singularidades e Resíduos

5. Para cada função a seguir, determine o tipo de singularidade que a mesma apresenta em  $z_0$  (polo de ordem  $m$  ou singularidade essencial) e calcule o resíduo de  $f$  em  $z = z_0$ :

- (a)  $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2(z - 1)}, z_0 = 0$
- (b)  $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2(z - 1)}, z_0 = 1$
- (c)  $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}, z_0 = 0$
- (d)  $f(z) = \frac{z^2 + (1 - i)z - i}{z^2 + 1}, z_0 = i$
- (e)  $f(z) = \frac{\sinh z}{z^4}, z_0 = 0$
- (f)  $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z + 1)}, z_0 = 0$
- (g)  $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z + 1)}, z_0 = -1$
- (h)  $f(z) = z \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right), z_0 = 0$
- (i)  $f(z) = \frac{\cos z}{z}, z_0 = 0$
- (j)  $f(z) = e^{1/z}, z_0 = 0$
- (k)  $f(z) = \frac{\operatorname{Log}(1 + z)}{z^2}, z_0 = 0$
- (l)  $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}, z_0 = 0$
- (m)  $f(z) = \cosh\left(\frac{1}{z}\right), z_0 = 0$
- (n)  $f(z) = \frac{\operatorname{cosec}(z^2)}{z^3}, z_0 = 0$
- (o)  $f(z) = z \cos\left(\frac{1}{z}\right), z_0 = 0$

6. Determine o valor das integrais a seguir (com todas as curvas envolvidas orientadas no sentido anti-horário):

- (a)  $\int_{\gamma} \frac{3z^2 + 2}{(z - 1)(z^2 + 9)} dz$ , onde  $\gamma$  é a circunferência  $|z - 2| = 2$ ;
- (b)  $\int_{\gamma} \frac{3z^2 + 2}{(z - 1)(z^2 + 9)} dz$ , onde  $\gamma$  é a circunferência  $|z - 1| = 1$ ;
- (c)  $\int_{\gamma} \frac{3z^2 + 2}{(z - 1)(z^2 + 9)} dz$ , onde  $\gamma$  é a circunferência  $|z| = 4$ ;
- (d)  $\int_{\gamma} \frac{z + 1}{z^2 - 2z} dz$ , onde  $\gamma$  é a circunferência  $|z - 4| = 3$ ;
- (e)  $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} dz$ , onde  $\gamma$  é a circunferência  $|z - 3| = 1$ ;

(f)  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2(z^2+4)}$ , onde  $\gamma$  é a circunferência  $|z| = 2$ ;

(g)  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2(z^2+4)}$ , onde  $\gamma$  é a circunferência  $|z+2| = 3$ ;

(h)  $\int_{\gamma} \operatorname{tg} z dz$ , onde  $\gamma$  é a circunferência  $|z| = 2$ ;

(i)  $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sinh(2z)}$ , onde  $\gamma$  é a circunferência  $|z| = 2$ ;

(j)  $\int_{\gamma} \frac{\cosh(\pi z)}{z(z^2+1)}$ , onde  $\gamma$  é a circunferência  $|z| = 2$ ;

(k)  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 e^z}$ , onde  $\gamma$  é a circunferência  $|z| = 1$ ;

(l)  $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{cosec} z}{z}$ , onde  $\gamma$  é a circunferência  $|z| = 1$ ;

(m)  $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{cosec} z}{z^2}$ , onde  $\gamma$  é a circunferência  $|z| = 1$ ;

(n)  $\int_{\gamma} z e^{1/z} dz$ , onde  $\gamma$  é a circunferência  $|z| = 2$ ;

(o)  $\int_{\gamma} \tanh z dz$ , onde  $\gamma$  é a circunferência  $|z-i| = 1$ ;

(p)  $\int_{\gamma} \frac{1-e^z}{z^3} dz$ , onde  $\gamma$  é a circunferência  $|z| = 1/2$ ;

7. Use o teorema dos resíduos para calcular as seguintes integrais impróprias:

(a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$

(b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \pi$

(c)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(d)  $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{6}$

(e)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

(f)  $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx = \frac{\pi}{6}$

(g)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}$

(h)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+4x+5} = -\frac{\pi \operatorname{sen} 2}{e}$

(i)  $\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} = \frac{\pi e^{-a}}{2}, a \geq 0$

(j)  $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2e}$

(k)  $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$

(l)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} = -\frac{\pi}{5}$

(m)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1} dx$

(n)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x+a)^2+b^2} = \frac{e^{-b} \cos a}{b}, a, b > 0$

(o)  $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \frac{\pi}{2}$

(p)  $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

(q)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{(2n-2)!}{((n-1)!2^{n-1})^2} \pi, n \in \mathbb{N}$

(r)  $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2}, a \neq 0$

$$(s) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

8. Use o teorema dos resíduos para calcular as seguintes integrais definidas:

$$(a) \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$(f) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} = 2\pi a(a^2 - 1)^{-3/2}, \quad a > 1$$

$$(b) \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a^2 + \cos^2 \theta} = \frac{\pi}{a\sqrt{a^2 + 1}}, \quad a > 0$$

$$(g) \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2n} \theta d\theta = \pi \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(c) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \operatorname{sen}^2 \theta} = \pi\sqrt{2}$$

$$(h) \int_0^{\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = \pi \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(d) \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}, \quad a > 1$$

$$(i) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \frac{2\pi}{1 - a^2}, \quad |a| < 1$$

$$(e) \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 + a \operatorname{sen} \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}, \quad |a| < 1$$

9. Dados  $a > 0$  e  $0 < \alpha < 1$ , considere  $\gamma_a$  a fronteira da região  $D_a = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leq a, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\pi\}$  orientada no sentido anti-horário e a função  $f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{1 + e^z}$ . Integrande  $f$  sobre  $\gamma_a$  e fazendo  $a \rightarrow +\infty$ , mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}.$$

10. Dado  $r > 0$ , seja  $\gamma_r$  a fronteira da região  $D_r = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg z \leq 2\pi/3\}$  e consideremos a função  $f(z) = \frac{1}{1 + z^3}$ ,  $z^3 \neq -1$ .

① Usando o teorema dos resíduos, verifique que

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; e^{\pi i/3}).$$

Fazendo  $r \rightarrow \infty$ , conclua que  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ .

② Usando uma técnica semelhante, conclua que para qualquer  $\alpha > 1$  tem-se

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^\alpha} = \frac{\pi}{\alpha \operatorname{sen}(\pi/\alpha)}.$$

③ (Para quem conhece a função B) Outra forma de calcular a integral do item (b) é fazer a mudança de variável  $u = x^\alpha$ , obtendo

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^\alpha} &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{1 + u} du \\ &= \frac{1}{\alpha} B\left(\frac{1}{\alpha}, 1 - \frac{1}{\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma(1)} \\ &= \frac{\pi/\alpha}{\operatorname{sen}(\pi/\alpha)} \end{aligned}$$

11. Neste exercício, vamos utilizar a conhecida fórmula

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

para determinar o valor das *integrais de Fresnel*. Integrando a função  $f(z) = e^{-z^2}$  sobre a fronteira do setor circular  $S_{R,\pi/4} : 0 \leq \theta \leq \pi/4, 0 \leq r \leq R$  e fazendo  $R \rightarrow \infty$ , mostre que

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

12. Neste exercício, estudaremos a integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2 - 4x + 5)}$ .

- ① Verifique que, no sentido estrito da definição de integral imprópria, a integral acima diverge.
- ② Mostre que

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-a} \frac{dx}{x(x^2 - 4x + 5)} + \int_a^{\infty} \frac{dx}{x(x^2 - 4x + 5)} = \frac{2\pi}{5}.$$

O valor acima é chamado de *Valor Principal de Cauchy* da integral em questão e é denotado por VP  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2 - 4x + 5)}$ .