

Lista 1

☆ Integrais múltiplas

1. Calcule as seguintes integrais duplas:

- (a) $\int \int_R (2y^2 - 3xy^3) dx dy$, onde $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$.
- (b) $\int \int_R x \sin y dx dy$, onde $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \pi/6\}$.
- (c) $\int \int_R \frac{1}{x+y} dx dy$, onde $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.
- (d) $\int \int_D xy dx dy$, onde $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.
- (e) $\int \int_D (x^2 - 2xy) dx dy$, onde $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 2 - x\}$.
- (f) $\int \int_D e^{x/y} dx dy$, onde $D = \{(x, y) : 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq y^3\}$.
- (g) $\int \int_D x \cos y dx dy$, onde D é a região limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$.
- (h) $\int \int_D 4y^3 dx dy$, onde D é a região limitada por $y = x - 6$ e $y^2 = x$.
- (i) $\int \int_D xy dx dy$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada pela circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1.
- (j) $\int \int_D (x^2 \tan x + y^3 + 4) dx dy$, onde $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$.
- (k) $\int \int_D x^2 dx dy$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. Calcule as seguintes integrais iteradas:

- ① $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$
- ② $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos(x^2) dx dy$
- ③ $\int_0^1 \int_{\sqrt[4]{y}}^1 \cos(1 + x^5) dx dy$
- ④ $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy$

$$\textcircled{5} \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} dx dy$$

$$\textcircled{6} \int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \sin(y^3) dy dx$$

3. Calcule as integrais:

$$\textcircled{1} \iint_D x dx dy, \text{ onde } D \text{ é o disco de centro na origem e raio } 5.$$

$$\textcircled{2} \iint_R xy dx dy, \text{ onde } R \text{ é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências } x^2 + y^2 = 4 \text{ e } x^2 + y^2 = 25.$$

$$\textcircled{3} \iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \text{ onde } R \text{ é a região interior à cardioide } r = 1 + \sin \theta \text{ e exterior à circunferência } r = 1.$$

$$\textcircled{4} \iint_R (x^2 + y^2) dx dy, \text{ onde } R \text{ é a região limitada pelas espirais } r = \theta \text{ e } r = 2\theta, \text{ com } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

4. Seja D o disco de centro na origem e raio 1. Calcule as integrais abaixo:

$$\textcircled{1} \iint_D x^5 dx dy$$

$$\textcircled{2} \iint_D xy dx dy$$

$$\textcircled{3} \iint_D (x^3 y^2 - x^2 y^7) dx dy$$

$$\textcircled{4} \iint_D x^2 dx dy$$

$$\textcircled{5} \iint_D y^2 dx dy$$

$$\textcircled{6} \iint_D x^2 y^2 dx dy$$

$$\textcircled{7} \iint_D y^6 \sin^3 x dx dy$$

5. Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região D e tem densidade ρ , nos seguintes casos:

$$\textcircled{1} D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \text{ e } \rho(x, y) = x^2.$$

$$\textcircled{2} D \text{ é o triângulo de vértices } (0, 0), (2, 1), (0, 3) \text{ e } \rho(x, y) = x + y.$$

$$\textcircled{3} D \text{ é a região do primeiro quadrante limitada pela parábola } y = x^2 \text{ e a reta } y = 1 \text{ e } \rho(x, y) = xy.$$

$$\textcircled{4} D \text{ é a região limitada pela parábola } y^2 = x \text{ e a reta } y = x - 2 \text{ e } \rho(x, y) = 3.$$

$$\textcircled{5} D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\} \text{ e } \rho(x, y) = y.$$

6. Determine o volume do sólido E em cada um dos seguintes casos:

- (a) E é limitado pelos planos coordenados, pela superfície $z = x\sqrt{x^2 + y^2}$ e pelos planos $x = 1$ e $y = 1$.
- (b) E é limitado superiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e sua projeção no plano xy é a região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$.
- (c) E é limitado superiormente por $z = xy$ e sua projeção no plano xy é o triângulo de vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ e $(1, 2)$.
- (d) E é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + 2y = 2$.
- (e) E é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.
- (f) E está contido no primeiro octante e é limitado pelo cilindro $z = 9 - y^2$ e pelo plano $x = 2$.
- (g) E é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$.
- (h) E é a região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, com $a > 0$.
- (i) E é o sólido delimitado pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.
- (j) E é o sólido delimitado pelo elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, com $a, b, c > 0$
- (k) E é a região acima do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e interior à esfera de centro na origem e raio 2.
- (l) E é a região acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.
- (m) E é o sólido delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$.

7. Calcule as integrais triplas:

- ① $\int \int \int_D yz \, dx \, dy \, dz$, onde $D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 2z, 0 \leq x \leq z + 2\}$.
- ② $\int \int \int_D y \, dx \, dy \, dz$, onde D é a região abaixo do plano $z = x + 2y$ e acima da região no plano xy limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$.
- ③ $\int \int \int_D xy \, dx \, dy \, dz$, onde D é o tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$.
- ④ $\int \int \int_D z \, dx \, dy \, dz$, onde D é limitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$ e $x + z = 1$.
- ⑤ $\int \int \int_D x \, dx \, dy \, dz$, onde D é limitada pelo parabolóide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$.
- ⑥ $\int \int \int_E (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, onde E é a região limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = -1$ e $z = 2$.
- ⑦ $\int \int \int_E y \, dx \, dy \, dz$, onde E é a região entre os cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$, limitada pelo plano xy e pelo plano $z = x + 2$.
- ⑧ $\int \int \int_E x^2 \, dx \, dy \, dz$, onde E é o sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

- ⑨ $\int \int \int_E e^z dx dy dz$ onde E é a região delimitada pelo parabolóide $z = 1 + x^2 + y^2$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelo plano $z = 0$.

8. Determine a área de cada superfície S abaixo:

- (a) S é a porção da esfera de centro na origem e raio 4 que está acima do plano $z = 1$.
 (b) S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 0$.
 (c) S é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ que está acima do plano $z = a$, com $0 < a < R$ fixados.

9. Calcule as integrais triplas:

- ① $\int \int \int_B (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, onde B é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
 ② $\int \int \int_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, onde E é a região interior ao cone $\varphi = \pi/6$ e à esfera $\rho = 2$.
 ③ $\int \int \int_E x dx dy dz$, onde E é o conjunto $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1, x \geq 0$.
 ④ $\int \int \int_E e^{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz$ onde E é a bola unitária centrada na origem.
 ⑤ $\int \int \int_E xyz dx dy dz$ onde E é a região limitada pelas esferas $r = 2$ e $r = 4$ que está acima do cone $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$.
 ⑥ $\int \int \int_E (x^2 + y^2) dx dy dz$ onde E é o hemisfério (sólido) da esfera de centro na origem e raio 1 que está acima do plano $z = 0$.
 ⑦ $\int \int \int_E \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz$ onde E é a região interior ao cone $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ e à esfera de centro na origem e raio 1.

10. Determine a massa e o centro de massa do sólido E cuja densidade é $\rho(x, y, z)$ nos seguintes casos:

- ① $E = [0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ e $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
 ② E é limitado pelo parabolóide $z = 4x^2 + 4y^2$ e pelo plano $z = a$ ($a > 0$) e ρ é constante igual a K .
 ③ E é um hemisfério sólido de raio $R > 0$ e a densidade em um ponto é proporcional a sua distância ao centro da base.
 ④ $E = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq a > 0\}$, com $a > 0$ e $\rho(x, y, z) = z$

11. Use a transformação $x = u^2, y = v^2, z = w^2$ para calcular o volume da região limitada pela superfície $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ e pelos planos coordenados.

12. Sejam $r, R > 0$ tais que $r < R$.

- ① Calcule $\int \int_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{n/2}} dx dy$, onde D é a região entre os círculos com centros na origem e raios r e $R, 0 < r < R$.

② Para que valores de n a integral tem limite quando $r \rightarrow 0+$? E quando $R \rightarrow \infty$?

③ Calcule $\int \int \int_D \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}} dx dy$, onde D é a região interior às esferas com centros na origem e raios r e R , $0 < r < R$.

④ Para que valores de n a integral tem limite quando $r \rightarrow 0+$? E quando $R \rightarrow \infty$?

13. Calcule as integrais iteradas $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx$ e $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy$. As respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique.