

Lista 2

☆ Integrais de linha

1. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo da curva indicada:

①  $\int_{\gamma} (x - 2y^2) dy$ ,  $\gamma$  é o arco da parábola  $y = x^2$  de  $(-2, 4)$  a  $(1, 1)$ .

②  $\int_{\gamma} xy dx + (x - y) dy$ ,  $\gamma$  consiste dos segmentos de reta de  $(0, 0)$  a  $(2, 0)$  e de  $(2, 0)$  a  $(3, 2)$ .

③  $\int_{\gamma} x^3 y^2 z dz$ ,  $\gamma$  é dada por  $x = 2t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^2$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

④  $\int_{\gamma} z^2 dx - z dy + 2y dz$ ,  $\gamma$  consiste dos segmentos de reta de  $(0, 0, 0)$  a  $(0, 1, 1)$ , de  $(0, 1, 1)$  a  $(1, 2, 3)$  e de  $(1, 2, 3)$  a  $(1, 2, 4)$ .

2. Calcule  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma$ , onde  $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\vec{i} - 7yz\vec{j} + 2xz^2\vec{k}$  e  $\gamma$  é a curva ligando o ponto  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 1, 1)$  nos seguintes casos:

(a)  $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ ;

(b)  $\gamma$  é composta dos segmentos de reta de  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 0, 0)$ , depois a  $(1, 1, 0)$  e depois a  $(1, 1, 1)$ ;

3. Calcule  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma$  para:

(a)  $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ , onde  $\gamma$  é o arco de circunferência  $\gamma(x) = (x, \sqrt{4 - x^2})$ , ligando  $(-2, 0)$  a  $(2, 0)$ ;

(b)  $\vec{F}(x, y) = 2(x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$ , onde  $\gamma$  é a elipse de equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , percorrida uma vez em sentido anti-horário.

4. Calcule:

①  $\int_{\gamma} x dx + (y + x) dy + z dz$ , sendo  $\gamma$  a intersecção das superfícies  $z = x^2 + y^2$  e  $z = 2x + 2y - 1$ , orientada de modo que sua projeção no plano  $Oxy$  seja percorrida uma vez no sentido horário;

②  $\int_{\gamma} (2y + 1) dx + z dy + x dz$ , sendo  $\gamma$  a intersecção das superfícies  $x^2 + 4y^2 = 1$  e  $x^2 + z^2 = 1$ , com  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ , percorrida uma vez do ponto  $(1, 0, 0)$  ao ponto  $(-1, 0, 0)$ ;

- ③  $\int_{\gamma} y dx + z dy + x dz$ , sendo  $\gamma$  a intersecção das superfícies  $x + y = 2$  e  $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ , orientada de modo que sua projeção no plano  $Oxz$  seja percorrida uma vez no sentido horário;
- ④  $\int_{\gamma} y dx + z dy + x dz$ , sendo  $\gamma$  a intersecção das superfícies  $z = xy$  e  $x^2 + y^2 = 1$ , orientada de modo que sua projeção no plano  $Oxy$  seja percorrida uma vez no sentido horário;
- ⑤  $\int_{\gamma} x^2 dx + x dy + z dz$ , sendo  $\gamma$  a intersecção das superfícies  $z = \frac{x^2}{9}$  e  $z = 1 - \frac{y^2}{4}$ , orientada de modo que sua projeção no plano  $Oxy$  seja percorrida uma vez no sentido anti-horário;
- ⑥  $\int_{\gamma} y^2 dx + 3z dy$ , sendo  $\gamma$  a intersecção das superfícies  $z = x^2 + y^2$  e  $z = 2x + 4y$ , orientada de modo que sua projeção no plano  $Oxy$  seja percorrida uma vez no sentido anti-horário;
- ⑦  $\int_{\gamma} z dy - x dz$ , sendo  $\gamma$  a intersecção do elipsóide  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} = \frac{4}{3}$  com o plano  $x + z = 2$ , orientada de modo que sua projeção no plano  $Oxy$  seja percorrida uma vez no sentido anti-horário.
- ⑧  $\int_{\gamma} 2x dx + (z^2 - y^2) dz$ , onde  $\gamma$  é o arco circular dado por  $x = 0$ ,  $y^2 + z^2 = 4$ , de  $(0, 2, 0)$  a  $(0, 0, 2)$   $y \geq 0$ ;
- ⑨  $\int_{\gamma} \frac{(x + y) dx - (x - y) dy}{x^2 + y^2}$ , onde  $\gamma$  é a circunferência  $x^2 + y^2 = a^2$ , percorrida uma vez no sentido horário;
- ⑩  $\int_{\gamma} \sqrt{y} dx + \sqrt{x} dy$ , sendo  $\gamma$  a fronteira da região limitada por  $x = 0$ ,  $y = 1$  e  $y = x^2$ , percorrida uma vez no sentido horário;

5. Verifique que a integral

$$\int_{\gamma} 2x \sin y dx + (x^2 \cos y - 3y^2) dy$$

onde  $\gamma$  é uma curva ligando  $(-1, 0)$  a  $(5, 1)$ , é *independente do caminho* e calcule o seu valor.

6. Em cada caso abaixo, determine se  $\vec{F}$  é ou não um campo gradiente no domínio indicado. Em caso afirmativo, determine o potencial de  $\vec{F}$ .

- (a)  $\vec{F}(x, y) = (x + y, y - x)$  em  $\mathbb{R}^2$
- (b)  $\vec{F}(x, y) = \left( xy + y \sin(xy), \frac{x^2}{2} + \sin(xy) \right)$  em  $\mathbb{R}^2$
- (c)  $\vec{F}(x, y) = (y \ln(xy), x \ln(xy) + x)$ ,  $x, y > 0$
- (d)  $\vec{F}(x, y) = (x, x)$  em  $\mathbb{R}^2$
- (e)  $\vec{F}(x, y) = (2xe^y + y, x^2e^y + x - 2y)$  em  $\mathbb{R}^2$
- (f)  $\vec{F}(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ , em  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$
- (g)  $\vec{F}(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ , em  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ se } y = 0\}$

- (h)  $\vec{F}(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$ , em  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$
- (i)  $\vec{F}(x, y, z) = (2x^2 + 8xy^2, 3x^3y - 3xy, -4z^2y^2 - 2x^3z)$  em  $\mathbb{R}^3$
- (j)  $\vec{F}(x, y, z) = (x + z, -y - z, x - y)$  em  $\mathbb{R}^3$
- (k)  $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, -4 - 2y \sin x, 3xz^2 + 2)$  em  $\mathbb{R}^3$

7. Calcule as integrais abaixo relativamente ao comprimento de arco:

- ①  $\int_{\gamma} x ds$ ,  $\gamma(t) = (t^3, t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .
- ②  $\int_{\gamma} xy^4 ds$ ,  $\gamma$  é a semi-circunferência  $x^2 + y^2 = 16$ ,  $x \geq 0$ .
- ③  $\int_{\gamma} xyz ds$ ,  $\gamma: x = 2t, y = 3 \sin t, z = 3 \cos t$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ .
- ④  $\int_{\gamma} xy^2z ds$ ,  $\gamma$  é o segmento de reta de  $(1, 0, 1)$  a  $(0, 3, 6)$ .
- ⑤  $\int_{\gamma} x^3 y ds$  onde  $\gamma$  é a circunferência de centro na origem e raio 4
- ⑥  $\int_{\gamma} xy ds$  onde  $\gamma(t) = (t, t^4)$  percorrida de  $(0, 0)$  a  $(2, 16)$

8. Um cabo delgado é dobrado na forma de um semi-círculo  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x \geq 0$ . Se a densidade linear  $\rho(x, y)$  do cabo no ponto  $(x, y)$  é  $x^2$ , determine a massa e o centro de massa do cabo.

9. Usando o Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:

- (a)  $\oint_{\gamma} x^2 y dx + xy^3 dy$ , onde  $\gamma$  é o quadrado com vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(0, 1)$ , orientado positivamente;
- (b)  $\oint_{\gamma} (x + 2y) dx + (x - 2y) dy$ , onde  $\gamma$  consiste do arco da parábola  $y = x^2$  de  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$  e do segmento de reta de  $(1, 1)$  a  $(0, 0)$ .
- (c)  $\oint_{\gamma} (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (2x + \cos y^2) dy$ , onde  $\gamma$  é a fronteira da região limitada pelas parábolas  $y = x^2$  e  $x = y^2$  percorrida no sentido anti-horário.
- (d)  $\oint_{\gamma} x^2 dx + y^2 dy$ ,  $\gamma$  é a curva  $x^6 + y^6 = 1$ , sentido anti-horário.
- (e)  $\oint_{\gamma} xy dx + (2x^2 + x) dy$ ,  $\gamma$  consiste do segmento de reta unindo  $(-2, 0)$  a  $(2, 0)$  e da semi-circunferência  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y \geq 0$ , orientada positivamente.
- (f)  $\oint_{\gamma} 2xy dx + (x^2 + x) dy$ ,  $\gamma$  é a cardióide  $\rho = 1 + \cos \theta$  orientada positivamente.
- (g)  $\oint_{\gamma} (xy + e^{x^2}) dx + (x^2 - \ln(1 + y)) dy$ ,  $\gamma$  consiste do segmento de reta de  $(0, 0)$  a  $(\pi, 0)$  e do arco da curva  $y = \sin x$ , orientada positivamente.

- (h)  $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $\vec{F}(x, y) = (y^2 - x^2 y)\vec{i} + xy^2\vec{j}$  e  $\gamma$  consiste do arco de circunferência  $x^2 + y^2 = 4$  de  $(2, 0)$  a  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ , e dos segmentos de reta de  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  a  $(0, 0)$  e de  $(0, 0)$  a  $(2, 0)$ .

10. Calcule:

- (a)  $\int_{\gamma} 5x^2 y dx + (7x^3 + e^y) dy$ , sendo  $\gamma$  a elipse  $16x^2 + 25y^2 = 100$ , percorrida de  $(0, -2)$  até  $(0, 2)$ ,  $x > 0$ .
- (b)  $\int_{\gamma} (2xe^y - x^2 y - \frac{y^3}{3}) dx + (x^2 e^y + \sin y) dy$ , sendo  $\gamma$  a circunferência  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ , percorrida de  $(0, 0)$  até  $(2, 0)$  com  $y > 0$ .
- (c)  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma$ , sendo  $\gamma$  a fronteira do retângulo  $[1, 2] \times [-1, 1]$  percorrida no sentido anti-horário e  $\vec{F}(x, y) = \left(2 \arctan \frac{y}{x}, [\ln(x^2 + y^2) + 2x]\right)$ .
- (d)  $\int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$  sendo  $\gamma$  a curva fronteira da região determinada pelas curvas  $y^2 = 2(x + 2)$  e  $x = 2$ , orientada no sentido horário.
- (e)  $\int_{\gamma} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$  sendo  $\gamma$  a curva  $y = x^2 + 1$   $-1 \leq x \leq 2$ , percorrida do ponto  $(-1, 2)$  a  $(2, 5)$ .
- (f)  $\int_{\gamma} \frac{y dx - (x - 1) dy}{(x - 1)^2 + y^2}$  sendo  $\gamma$  a circunferência  $x^2 + y^2 = 4$ , percorrida no sentido horário.
- (g)  $\int_{\gamma} \frac{x^2 y dx - x^3 dy}{(x^2 + y^2)^2}$  sendo  $\gamma = \partial R$  onde  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ , orientada no sentido horário.
- (h)  $\int_{\gamma} 7x^6 y dx + x^7 dy$  sendo  $\gamma(t) = (t, e^{t^2-1})$ , onde  $t \in [0, 1]$ .
- (i)  $\int_{\gamma} [\ln(x + y^2) - y] dx + [2y \ln(x + y^2) - x] dy$  sendo  $\gamma$  a curva  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$  com  $y \geq 0$  orientada no sentido horário.
- (j)  $\int_{\gamma} \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$  sendo  $\gamma$  a curva dada por  $x(t) = \cos^3 t$  e  $y(t) = \sin^3 t$  com  $y \geq 0$  ligando os pontos  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ , nessa ordem.
- (k)  $\int_{\gamma} \sin(yz) dx + xz \cos(yz) dy + xy \cos(yz) dz$ , sendo  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$  para  $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ .
- (l)  $\int_{\gamma} (2x \sin(x^2 + 3) - xy + 1) dx + (e^{y^2} - x^2 y) dy$ , onde  $\gamma$  é a curva  $y = 1 - x^2$  percorrida de  $(-1, 0)$  a  $(1, 0)$ .
- (m)  $\int_{\gamma} (x^7 y - \ln(1 + \sin^4 x)) dx + (x^2 y + \cos(y^2)) dy$ , onde  $\gamma$  é fronteira da elipse  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  orientada no sentido anti-horário.
- (n)  $\int_{\gamma} y \ln(xy) dx + (x \ln(xy) + x) dy$  onde  $\gamma(t) = (e^t - t, e^{1-t})$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .
- (o)  $\int_{\gamma} \frac{(x + y) dx - (x - y) dy}{x^2 + y^2}$  onde  $\gamma$  é a circunferência  $x^2 + y^2 = R^2$  percorrida no sentido anti-horário.

(p)  $\int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$  onde  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 3\pi$

(q)  $\int \sqrt[3]{y} dx + \sqrt[3]{x} dy$ , onde  $\gamma$  é a fronteira da região delimitada pelas retas  $x = 0$ ,  $y = 1$  e  $y = x^2$  percorrida uma vez no sentido horário

11. Seja  $\gamma$  uma curva plana simples, fechada e lisa por partes percorrida uma vez no sentido horário. Encontre todos os valores possíveis para

(a)  $\int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$

(b)  $\int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{4x^2 + 9y^2}$

12. Mostre que as integrais abaixo independem do caminho e calcule-as.

(a)  $\int_{(1,1)}^{(a,b)} 2xy dx + (x^2 - y^2) dy$ .

(b)  $\int_{(0,0)}^{(a,b)} \sin y dx + x \cos y dy$ .

(c)  $\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz dx + xz dy + xy dz$ .

(d)  $\int_A^B \frac{x dx + y dy + z dz}{x^2 + y^2 + z^2}$ , onde o ponto  $A$  pertence à esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , o ponto  $B$  pertence a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  e o caminho que os liga não passa pela origem.

13. Determine todos os valores possíveis da integral

$$\int_{(1,0)}^{(2,2)} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

sobre um caminho que não passe pela origem.

14. Seja o campo  $\vec{F}(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$  e  $\gamma$  a curva dada por  $\gamma(t) = (e^t, \sin t)$  para  $0 \leq t \leq \pi$ . Calcule  $\int_{\gamma} \vec{F} d\gamma$ .

15. Seja  $D$  uma região de  $\mathbb{R}^2$  com  $D$  e  $\partial D$  satisfazendo as hipóteses do Teorema de Green. Mostre que a área de  $D$  coincide com a integral  $\int_{\partial D} x dy = \int_{\partial D} -y dx$ .

16. Usando o exercício anterior, calcule a área de  $D$  nos seguintes casos:

(a)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ , para  $a, b > 0$ ;

(b)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3}\}$ , para  $a > 0$ ;

(c)  $D$  é a região limitada pela hipociclóide dada por  $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

17. Neste exercício, vamos calcular a área de um polígono irregular.

(a) Se  $\gamma$  é o segmento de reta ligando o ponto  $(x_1, y_1)$  ao ponto  $(x_2, y_2)$ , mostre que

$$\int_{\gamma} x dy - y dx = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

(b) Em ordem anti-horária, os vértices de um polígono são  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$ . Mostre que sua área é dada por

$$A = \frac{1}{2}[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_{N-1} y_N - x_N y_{N-1}) + (x_N y_1 - x_1 y_N)].$$

(c) Determine a área do pentágono de vértices  $(0, 0), (2, 1), (1, 3), (0, 2)$  e  $(-1, 2)$ .

18. Sejam as curvas  $\gamma_1$  a circunferência  $x^2 + y^2 = \frac{1}{16}$  percorrida no sentido anti-horário,  $\gamma_2$  a circunferência  $x^2 + y^2 = 4$ , percorrida no sentido anti-horário e  $\gamma_3$  a curva formada pela união das três seguintes circunferências:  $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{9}$ ,  $(x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{9}$ , ambas percorridas no sentido horário e  $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$  percorrida no sentido anti-horário. Se  $I_k = \int_{\gamma_k} P dx + Q dy$  onde

$$P(x, y) = -y \left( \frac{1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{(x+1)^2 + y^2} \right)$$

e

$$Q(x, y) = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}$$

então calcule  $I_1, I_2$  e  $I_3$ .

19. Calcule  $\int_{\gamma} F d\gamma$  onde  $F = \left( \frac{-y}{x^2 + \frac{y^2}{9}} + y, \frac{x}{x^2 + \frac{y^2}{9}} + 3x \right)$  se

(a)  $\gamma$  é a curva  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ , percorrida uma vez no sentido horário.

(b)  $\gamma$  é a curva  $(x-1)^2 + y^2 = 4$ , percorrida uma vez no sentido horário.

20. Um campo de vetores  $\vec{F}$  em  $\mathbb{R}^2$  se diz *radial* (ou *central*) se existe uma função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\vec{F}(x, y) = g(|\vec{r}|)\vec{r}$ , onde  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ . Suponha que  $g$  é de classe  $C^1$ . Mostre que  $\vec{F}$  é conservativo.